תרגיל 8

1. אם (X,τ) מ"ט B_2 אזי $|\tau| \le 2^{\aleph_0}$

2. אם (X,τ) מ"ט ו B_τ בסיס ל τ. אזי כל $B_\tau \subseteq B' \subseteq \tau$ היא בסיס גם כן.

3. יהא (X,τ) מ"ט ו B_τ בסיס ל τ. תהא C המקיימת: כל קבוצה ב B_τ היא איחוד של קבוצות מ C. הוכיחו כי C בסיס ל τ

4. יהא X קבוצה ו τ, τ' טופולוגיות ו $B_\tau, B_{\tau'}$ בסיסים להם, בהתאמה.
   (א) הוכיחו כי אם $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$ אזי $\tau \subseteq \tau'$
   (ב) הפריכו את הכיוון השני. כלומר , אם $\tau \subseteq \tau'$ אזי לא בהכרח $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$.

5. תהא $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ רציפה ופתוחה. הוכיחו/הפריכו: אם X הוא B_2 אזי גם $f(X)$ הוא B_2.

6. יהא $X = \mathbb{R}\cup\{p\}$ (עבור $p\notin\mathbb{R}$) ו $\tau = \{O : p\notin O \vee |O^c| \le \aleph_0\}$. הוכיחו כי (X,τ) אינו ספרבילי ואינו B_2.

7. בתרגיל זה נוכיח שת"מ של ספרבילי אינו בהכרח ספרבילי. נגדיר $X = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_2 \right\}$ (חצי מישור העליון) . נגדיר

$$B_1 = \{B(x,r) : x\in X,\, 0<r\in\mathbb{R}\}\cap X$$

$$B_2 = \left\{ B(x,x_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : x\in X,\, 0<x_2 \right\}$$

כאשר $B(x,r)$ הוא הכדור "הרגיל" ב $\mathbb{R}^2$. במילים אחרות B_1 הוא חיתוך של הכדורים $B(x,r)$ ב $\mathbb{R}^2$. ו B_2 הוא כל הכדורים הפתוחים שהסגור שלהם משיק ל "ציר ה x" איחוד נקודת ההשקה.
נגדיר τ להיות הטופולוגיה ש $B_1 \cup B_2$ הוא הבסיס שלה.

(א) הוכיחו כי (X,τ) ספרבילי.

(ב) נגדיר ת"מ $Y=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1\in\mathbb{R}\right\}$. הוכיחו כי Y אינו ספרבילי.