אינפי 1 – תרגיל 11

1. תהי f רציפה בכל נקודה בקטע (a,∞) כך ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ וגם $\lim_{x\to a^+} f(x)=m\in\mathbb{R}$ (כלומר הגבולות הנ"ל קיימים וסופיים). הוכח ש f רציפה במ"ש בקטע (a,∞).

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. מכיוון ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכן בפרט לכל $x_1,x_2\in[M,\infty)$ מתקיים

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-l+l-f(x_2)|\le|f(x_1)-l|+|l-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ללא תלות במרחק בין x_1,x_2 כלל.

כפי שראינו בכיתה, ניתן להשלים את f לפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,M+1]$ ולכן היא רציפה שם במ"ש, ולכן קיים $\delta>0$ (וניתן גם לבחור $0<\delta<1$) כך שלכל $x_1,x_2\in(a,M+1]$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

ביחד לכל $|x_1-x_2|<\delta<1$, $x_1,x_2\in(a,\infty)$, מתקיים $x_1,x_2\in(a,M+1]$ או $x_1,x_2\in[M,\infty)$ ולכן $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ ולכן הפונקציה רציפה במ"ש.

2. הוכח/הפרך: f אינה רציפה במ"ש אם"ם f^{-1} רציפה במ"ש

הפרכה: $f=f^{-1}=x$ ושתיהן כמובן רציפות במ"ש

3. תהי פונקציה f המקיימת את התנאי הבא: קיים $k>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$ (זה נקרא תנאי ליפשיץ).
הוכח/הפרך: f רציפה במ"ש ב A.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{k}$ אזי אם $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|<k\delta=k\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$ משל.

4. קבע האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים הנתונים

a. $\sin e^{x}$ בקטע $(0,\infty)$

לא: נמצא שתי סדרות מתאימות על מנת להראות שפונקציה זו אינה רציפה במ"ש.

$x_n=\ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ ו $y_n=\ln\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. קל לראות ש

$$|x_n-y_n|=\ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-\ln\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)=\ln(1)=0$$

כמו כן, $|f(x_n)-f(y_n)|=|1-(-1)|=2$

b. $\frac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}$ בקטע $(-\infty,\infty)$

כן: נסמן $f(x)=\frac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}$. קל לראות ש

$$\forall x:\frac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}=f(x)=f(x+2\pi)=\frac{\sin(\sin(x+2\pi))}{\cos(\cos(x+2\pi))}$$

כלומר זו פונקציה מחזורית על כל הממשיים. כמו כן, $-\frac{\pi}{2}<-1\leq\cos x\leq 1<\frac{\pi}{2}$ וגם $\cos(x)>0$

עבור $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ולכן סה"כ $\cos(\cos x)>0$ ובפרט $\cos(\cos x)\neq 0$.

זו חלוקה של פונקציה רציפות, המכנה שונה מאפס, ולכן סה"כ זו פונקציה רציפה.

פונקציה מחזורית ורציפה על כל הממשיים הינה רציפה במ"ש.

c. $\ln x$ בקטע $(0,\infty)$

לא: $\ln x$ אינה חסומה בקטע הסופי $(0,1)$ מכיוון ש $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ולכן אינה רציפה שם במ"ש

ובוודאי לא בקטע כולו.

d. $\ln\left(\ln(e^{e^x})\right)$ בקטע $(-\infty,\infty)$

כן: $\ln\left(\ln(e^{e^x})\right)=\ln\left(e^{x}\right)=x$ וזו פונקציה ידועה כרציפה במ"ש

e. $\sin\sqrt{(x+2\pi)}$ בקטע $(0,\infty)$

כן: $x+2\pi$ רציפה במ"ש ובתחום הנ"ל $x+2\pi>0$. $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש עבור $x>0$ ו $\sin x$ רציפה במ"ש על כל הממשיים. לכן סה"כ זו הרכבה של רציפות במ"ש ולכן רציפה במ"ש.

f. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ בקטע מהצורה $(\pi k, \pi k+\pi)$ עבור k שלם

כן: בתוך קטע מהצורה הזו הפונקציה רציפה, וראינו בתרגיל קודם שבקצות הקטע לפונקציה יש גבול. לכן סה"כ היא היא רציפה במ"ש בקטע.

g. $\ln\left|1-\sin\frac{1}{x}\right|$ בקטע $[0.1,\infty)$

לא: אמנם לפונקציה יש גבולות בקצות הקטע, אבל היא לא מוגדרת בנקודה $0.1 < x=\frac{2}{\pi}$ שנמצאת בקטע לכן בוודאי אינה רציפה שם במ"ש.