88-195 תשעא
פתרון 1:

1.

a. נתונה הקבוצה $A=\{1,3,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ עבור כל טענה קבע אם נכונה.

$2\in A,\quad \{1\}\subset A,\quad \{2\}\subset A,\quad \{1,2\}\in A,\quad \{1,2\}\subset A,\quad \{1\}\in A,\quad \{\{1,2\}\}\subset A,\quad \{1,\{1,2\}\}\subset A$

$2\notin A,\quad \{1\}\subset A,\quad \{2\}\not\subset A,\quad \{1,2\}\in A,\quad \{1,2\}\not\subset A,\quad \{1\}\in A,\quad \{\{1,2\}\}\subset A,\quad \{1,\{1,2\}\}\subset A$

קבע נכון או לא נכון לגבי הטענות הבאות ונמק <u>בקצרה</u>:

i. $\{1,2\}\in\{1,2,\{1\}\}$

לא נכון, אין איבר כזה בקבוצה

ii. $\phi\in\{\phi,a\}$

נכון, זהו האיבר הראשון

iii. $\phi\subset\{\phi,a\}$

נכון, הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה.

b. נתונות הקב' $A=\{\{\phi\},\{1\}\}, B=\{A,1,\phi\}$. קבע האם נכון או לא ונמק בקצרה:

i. $A\in B$

נכון, A באמת איבר בקבוצה B

ii. $A\subseteq B$

לא, הקבוצה שמכילה את אחד (למשל) אינה איבר בB

iii. $\phi\in A$

לא, הקבוצה הריקה אינה איבר בA

2. תהי $A=\{\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\}$. רשום את:

a. איברי A שאינם קבוצות חלקיות של A.

$\{\phi,\{\phi\}\}$

b. קבוצות חלקיות של A שאינן איברי A.

$\{\phi\},\{\{\phi,\{\phi\}\}\},A$

c. איברי A שהם גם קבוצות חלקיות שלה.

ϕ

3. מצא דוגמא לקבוצות המקיימות את התנאים בכל סעיף:

a. $A\in B\in C\wedge A\notin C$ (כלומר,שייכות איננה טרנזיטיבית)

$A\in B=\{A,1\}\in C=\{B,2\}\Rightarrow A\notin C$

b. $A\in B\wedge A\subseteq B$

$A=\{1\},B=\{A,1\}\Rightarrow A\in B\wedge A\subseteq B$

4. C,B,A קבוצות. הוכח או הפרך:

a. $(A\in B)\wedge(B\subseteq C)\Rightarrow A\in C$

הוכחה: $\big(A\in B\big)\wedge\big(\forall b\in B: b\in C\big)\Rightarrow A\in C$

b. $(A\in B)\wedge(B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$

הפרכה: $A=\{1\},B=\{A\},C=B$

5. נתונות הקב' $A=\{1,3,5,7\}, B=\{1,2,4,5,6\}, C=\{2,4,6,8\}$ מצא את הקבוצות:

$$B\cap A,\quad A\cup B,\quad B\cap C,\quad A\setminus B,\quad A\Delta B,\quad (A\cup B)\setminus C$$

$$B\cap A=\{1,5\},\quad A\cup B=\{1,3,5,7,2,4,6\},\quad B\cap C=\{2,4,6\},\quad A\setminus B=\{3,7\},\quad A\Delta B=\{3,7,2,4,6\}$$
$$,\quad (A\cup B)\setminus C=\{1,3,5,7\}$$

6. יהיו B,A קבוצות. הוכח בצורה פורמלית:

a. $A\cap(A\cup B)=A$

$$\supseteq:\quad x\in A\cap(A\cup B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in(A\cup B)\Rightarrow x\in A\Rightarrow A\supseteq A\cap(A\cup B)$$
$$\subseteq:\quad x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\wedge x\in(A\cup B)\Rightarrow x\in A\cap(A\cup B)\Rightarrow A\subseteq A\cap(A\cup B)$$
$$A=A\cap(A\cup B):\text{לכן}$$

b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$\subseteq:\quad x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow$$
$$\begin{cases} x\in B\ \ \text{אם}\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in A\cap B \\ \\ x\in C\ \ \text{אם}\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\Rightarrow x\in A\cap C\end{cases}\Rightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow$$
$$A\cap(B\cup C)\subseteq x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$\supseteq:\quad x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\Rightarrow$$
$$(x\in B\vee x\in C):\text{ואז}\quad x\in A:\text{בכל מקרה}\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow$$
$$A\cap(B\cup C)\supseteq x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cap(B\cup C)=x\in(A\cap B)\cup(A\cap C):\text{לכן}$$

7. יהיו תהי $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ונסתכל על תתי הקבוצות שלה והמשלימים ביחס אליה $A=\{2,4,6,8\}, B=\{1,2,4,5,6\}, C=\{1,3,5,7\}$. מצא את:

$$\phi^c,\quad U^c,\quad C^c,\quad A\setminus B,\quad B\setminus A,\quad (A\cup C)\setminus(C\setminus A)^c,\quad (A\cup B)^c\cap(B\cup C)^c,\quad (A\cup B)\setminus C$$

$$\phi^c=U,\quad U^c=\phi,\quad C^c=A,\quad A\setminus B=\{8\},\quad B\setminus A=\{1,5\},\quad (A\cup C)\setminus(C\setminus A)^c=C,$$
$$(A\cup B)^c\cap(B\cup C)^c=\phi,\quad (A\cup B)\setminus C=A$$

8. הוכח:

a. $(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C^c\cap D)\cup(A^c\cap B)=B$

$$(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C^c\cap D)\cup(A^c\cap B)=B\cap((\underline{\underline{A}})\cup(A\cap C^c\cap D)\cup(\underline{\underline{A^c}}))=B\cap U=B$$

b. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$$A\cap(B\Delta C)=A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B))=(A\cap(B\setminus C))\cup(A\cap(C\setminus B))=(A\cap(B\cap C^c))\cup(A\cap(C\cap B^c))$$
$$=((A\cap B)\cap C^c)\cup((A\cap C)\cap B^c)=((A\cap B)\setminus C)\cup((A\cap C)\setminus B)$$
$$=\big((A\cap B)\setminus\underset{\uparrow\text{חישבו מדוע}}{(A\cap C)}\big)\cup\big((A\cap C)\setminus(A\cap B)\big)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

9. נתונה הקב' $I=\{2,3,4\}$ נגדיר את הקבוצות $A_i \quad (i\in I)$ באופן הבא:
$\forall i\in I, A_i=\{x \mid x=i^2\cdot k, k\in \mathrm{N}\}$ (שימו לב, I במקרה זה נקראת קב' אינדקסים.
תזכורת:N היא קבוצת הטבעיים). בדוק האם 1,8,1152 שייך לאיחוד הכללי
$\bigcup_{i\in I} A_i$,לחיתוך הכללי $\bigcap_{i\in I} A_i$,לשניהם או לאף אחד מהם.

$\forall i\in I=\{2,3,4\}, A_i=\{x \mid x=i^2\cdot k, k\in \mathrm{N}\}$

ראשית נבין מיהן הקב' $A_i \quad (i\in I)$:

$$A_2=\{x \mid x=2^2\cdot k, k\in \mathrm{N}\}=\{4,8,12,...\}=\{4k\}_{k\in \mathrm{N}}$$
$$A_3=\{x \mid x=3^2\cdot k, k\in \mathrm{N}\}=\{9,18,27,...\}=\{9k\}_{k\in \mathrm{N}}$$
$$A_4=\{x \mid x=4^2\cdot k, k\in \mathrm{N}\}=\{16,32,48,...\}=\{16k\}_{k\in \mathrm{N}}$$

כלומר כל כפולות 4,כפולות 9 וכפולות 16. לכן מס' שמתחלק לפחות באחד מהם ישתייך לאיחוד ומספר שיתחלק בשלושתם ישתייך לחיתוך(ובפרט לאיחוד).

$$1152\in\bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow 1152\in\bigcup_{i\in I} A_i \quad , \quad 8\in A_2 \Rightarrow 8\in\bigcup_{i\in I} A_i \quad , \quad 1\notin\bigcup_{i\in I} A_i, 1\notin\bigcap_{i\in I} A_i$$

10. יהיו $A=\{1,2,3\}, B=\{2,3,4\}$.
a. רשום את קבוצות החזקה של B,A ,
b. חשב כמה איברים יש בקבוצות: $(P(A)\cup P(B))\setminus(P(A)\cap P(B))$

$$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}, \quad P(B)=\{\phi,\{2\},\{3\},\{4\},\{3,2\},\{3,4\},\{2,4\},\{2,3,4\}\}$$
$$|P(A)|=|P(B)|=2^3=8, |P(A)\cap P(B)|=4 \Rightarrow |P(A)\cup P(B)|=16-4=12 \Rightarrow$$
$$|(P(A)\cup P(B))\setminus(P(A)\cap P(B))|=8$$

11. הוכח או הפרך:
i. $A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

נכון. הוכחה:

$\Rightarrow$: נתון: $A\subseteq B$ נוכיח: $P(A)\subseteq P(B)$

$$x\in P(A)\Rightarrow x\subseteq A\Rightarrow(\text{הכלה טרנזיטיבית})x\subseteq B\Rightarrow x\in P(B)\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$$

$\Leftarrow$: נתון: $P(A)\subseteq P(B)$ נוכיח: $A\subseteq B$

$$x\in A\Rightarrow\{x\}\subseteq A\Rightarrow\{x\}\in P(A)\Rightarrow\{x\}\in P(B)\Rightarrow\{x\}\subseteq B\Rightarrow x\in B\Rightarrow A\subseteq B$$

ii. $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$

לא נכון.דוג' נגדית:

$$A=\{1,2\}, B=\{3,4\}\Rightarrow\{2,3\}\in P(A\cup B), \{2,3\}\notin P(A)\cup P(B)$$

12. הוכח ש $A=B \Leftrightarrow \forall C: A\cup C=B\cup C$

בכיוון ראשון, נניח $\forall C: A\cup C=B\cup C$, לכן בפרט עבור $C=\phi$ מקבלים מיד את השיוויון המיוחל $A=B$.

בכיוון ההפוך, נניח ו $A=B$ אז ברור שלכל קבוצה שנאחד בשני האגפים נשאר עם שיוויון.

13.* עוצמה של קבוצה סופית A (מסומן $|A|$) מוגדרת להיות כמות האיברים בקבוצה.

הוכח כי לכל קבוצה סופית מתקיים $|P(A)| = 2^{|A|}$

על כל תת קבוצה של A ניתן להגיד על כל איבר של A אם הוא **נמצא בה** או אם **לא.** לכן אוסף כל תתי הקבוצות הוא אוסף כל האפשרויות על כל איבר להיות שם או לא להיות שם.

נבין על ידי אנאלוגיה. הורה לשלושה ילדים הטיל מטבע שלוש פעמים, עבור כל אחד מהילדים. אם בהטלה יצא ראש, הילד ילך לאוניברסיטה, ואם זנב הוא ילך לעבוד. כמה אפשרויות יש לעבודת/לימודי הילדים?
זה שקול לשאלה, כמה קבוצות אפשריות יש לתתי קבוצות של הילדים, כאשר תת הקבוצה הולכת לאוניברסיטה והשאר ללימודים.
כמובן שכל תלמיד יכול ללמוד או לעבוד ולכן מספר האפשרויות הוא 2*2*2 (2 בחזקת מספר הילדים.