4.1 וריאציית המקדמים (Revisited)

נביא תחילה את כלל קרמר מאלגברה לינארית

משפט קרמר (Cramer's rule)

נתבונן במערכת המשוואות $A\vec{x}=\vec{b}$, כאשר A היא מטריצה ריבועית $(n\times n)$ ו b הוא וקטור עמודה $(n\times 1)$.

כידוע, למערכת קיים פתרון יחיד אם ורק אם $\det A\neq 0$. אם קיים פתרון יחיד ניתן למצוא כל רכיב בו ע"י

$$x_i=\frac{\det\left(A_i\right)}{\det\left(A\right)}=\frac{|A_i|}{|A|}$$

כאשר A_i היא המטריצה המתקבלת ע"י החלפת העמודה ה i שבמטריצה A בווקטור b.

$$A_i=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

הערה

בשיטה זו לא חייבים לפתור את כל המערכת כדי למצוא רכיב מסויים.

דוגמה

פתור את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר: $\begin{cases}4x-y+z=-5\\ 2x+2y+3z=10\\ 5x-2y+6z=1\end{cases}$

פתרון

נכתוב את המערכת בצורה מטריציונית: $\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 10\\ 1\end{pmatrix}$. נחשב את הדטרמיננטות:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix}=4\left(18\right)-\left(-1\right)\left(-3\right)+1\left(-14\right)=55$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}-5 & -1 & 1\\ 10 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 6\end{vmatrix}=...=-55$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 165$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 110$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = -1, y = \frac{165}{55} = 3, z = \frac{110}{55} = 2$$

ולסיכום פתרון המערכת הוא $\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

נחזור חזרה למד"ר

נחזור חזרה למד"ר $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = b(x)$.

ראינו שאם נתונים לנו n פתרונות בת"ל $y_1, ...y_n$ של המשוואות ההומוגנית הקשורה $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = 0$ אזי הפתרון הכללי של המד"ר האי הומוגנית הוא $y = C_1(x) y_1(x) + ... + C_n(x) y_n(x)$ כאשר $C_1, ...C_n$ מקיימים:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

נוכל להפעיל כאן את כלל קרמר ולהסיק שלכל $1 \le i \le n$

$$C_i'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & b(x) & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = \frac{W_i(x)}{W(x)}$$

המכנה הוא כמובן הוורונסקיאן, ואת המונה נהוג לסמן ע"י W_i.

אם נוציא אינטגרל נקבל $C_i(x) = \int^x \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + K_i$. בנינו את הפתרון הכללי של המד"ר:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \left(\int^x \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + K_i \right)$$

את הגבול התחתון באינטגרלים מוחרים בהתאם לצרכי השאלה.
ניתן גם לפתוח סוגריים:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i(x)\int^x\frac{W_i(x)}{W(x)}dx+\sum_{i=1}^{n}y_i(x)K_i$$

$\sum_{i=1}^{n}y_i(x)\int^x\frac{W_i(x)}{W(x)}dx$ - y_c-y_h הפתרון למשוואה ההומוגנית הקשורה
$\sum_{i=1}^{n}y_i(x)K_i$ - פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית.

הערה

חשוב מאוד שהמד"ר תהיה בצורה נורמלית($a_n(x)=1$) אחרת ה"פתרון" אינו נכון!

תרגילים

למשוואות הבאות נתונים שני פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית הקשורה. פתור אותן!

א. $y''-2y'-3y=2\sin x,\quad e^{-x},e^{3x}$

ב. $y''-2y'=x+2e^{x},\quad 1,e^{2x}$

פתרון

א. נחשב את הוורונסקיאן: $W\left(e^{-x},e^{3x}\right)=\begin{vmatrix}e^{-x}&e^{3x}\\-e^{-x}&3e^{3x}\end{vmatrix}=4e^{2x}$
כמו כן נחשב את W_1,W_2:

$$W_1=\begin{vmatrix}0&e^{3x}\\2\sin x&3e^{3x}\end{vmatrix}=-2e^{3x}\sin x$$

$$W_2=\begin{vmatrix}e^{-x}&0\\-e^{-x}&2\sin x\end{vmatrix}=2e^{-x}\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{W_1}{W}=\frac{-3e^{3x}\sin x}{4e^{2x}}=-\frac{1}{2}e^{3x-2x}\sin x=-\frac{1}{2}e^{x}\sin x$$

נחשב את האינטגרל $C_1=\int\frac{W_1}{W}dx$:

$$C_1=\int\frac{-1}{2}e^x\sin xdx=-\frac{1}{2}e^x\sin x-\int-\frac{1}{2}e^x\cos dx=\begin{bmatrix}u=\sin x&v=-\frac{1}{2}e^x\\u'=\cos x&v'=-\frac{1}{2}e^x\end{bmatrix}uv-\int u'vdx$$

$$=-\frac{1}{2}e^x\sin x+\int\frac{1}{2}e^x\cos xdx=\begin{bmatrix}u=\cos x&v=\frac{1}{2}e^x\\u'=-\sin x&v=\frac{1}{2}e^x\end{bmatrix}=...$$

$$C_1 = \frac{e^x}{4}(\cos x - \sin x) + K_1$$

באופן דומה $C_2 = -\frac{1}{20}e^{-3x}(\cos x + 3\sin x) + K_2$. הפתרון הכללי הוא

$$y = e^{-x}\left(\frac{e^x}{4}(\cos x - \sin x) + K_1\right) + e^{3x}\left(-\frac{e^{-3x}}{20}(\cos x + 3\sin x) + K_2\right)$$

$$= ... = K_1 e^{-x} + K_2 e^{3x} + \frac{\cos x - 2\sin x}{5}$$

ב. נחשב את הוורונסקיאן $W\left(1, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x}$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x + 2e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -xe^{2x} - 2e^{3x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x + 2e^x \end{vmatrix} = x + 2e^x$$

$$C_1 = \int \frac{W_1}{W} dx = ... = \frac{-x^2}{4} - e^x + K_1$$

$$C_2 = \int \frac{W_2}{W} = ... = \frac{-e^{2x}}{4}(x+1) - e^{-x} + K_2$$

הפתרון הוא:

$$y = K_1 - 1 + K_2 e^{2x} - \frac{x^2}{4} - 2e^x - \frac{x}{4}$$

תרגיל

פתור את המד"ר $x^3 y'' + xy' = x^3$. העזר בכך ש$y_1 = 1$ ו$y_2 = \ln|x|$ פתרונות של המד"ר ההומוגנית הקשורה.

פתרון

נביא את המשוואה לצורה נורמלית $y'' + \frac{1}{x}y' = x$. נחשב את הוורונסקיאן:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \ln|x| \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \ln(x) \\ x & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -x\ln|x|$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x$$

$$\int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{-x\ln|x|}{{}^1\!/\!_x}dx = \int -x^2\ln|x|\,dx = \frac{-x^3}{3}\ln|x| - \int \frac{1}{x}\left(\frac{-x^3}{3}\right)dx$$

$$= \frac{-x^3}{3}\ln|x| + \frac{x^3}{9}$$

$$\int \frac{W_2}{W}dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

הפתרון הכללי הוא

$$y = 1\left(-\frac{x^3}{3}\ln|x| + \frac{x^3}{9} + K_1\right) + \ln|x|\left(\frac{x^3}{3} + K_2\right) = K_1 + K_2\ln|x| + \frac{x^3}{9}$$

4.2 פונקציית גרין

חזרה מהירה

נניח שנתונה לנו בעיית קושי(מד"ר + תנאי התחלה): $\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$

ושני פתרונות בת"ל y_1, y_2 למשוואה ההומוגנית הקשורה, הפתרון הוא

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}b(t)\,dt$$

ו$G(x,y) = \dfrac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}$ פונקציית גרין

שאלה ממבחן(מועד ב׳ תשע"א, שאלה 2)

(א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

(ב) מצא נוסחה לפתרון הבעיה $y'' - 2y' + y = L(x)$,$y(0) = y'(0) = 0$

(ג) האם ניתן למצוא פתרון פרטי של המשוואה בסעיף (א) ע"י שימוש בנוסחה מסעיף ב.

פתרון

(א) נתבונן במשוואה ההומוגנית הקשורה $y''-2y'+y=0$. "אפשר לראות" ש$y_1=e^x$ פתרון שלה(נראה כיצד למצוא אותו בהמשך). נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה בעזרת הורדת סדר. נציב $\begin{cases} y=e^xz \\ y'=e^xz'+e^xz \\ y''=e^xz''+2e^xz'+e^xz \end{cases}$. מקבלים

$$e^xz''+2e^xz'+e^xz-2e^xz'-2e^k+e^xz=\frac{e^x}{x}$$

$$e^xz''=\frac{e^x}{x}$$

$$z''=\frac{1}{x}$$

$$z'=\ln|x|+C_1$$

$$z=x\ln|x|-x+C_1x+C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y=e^x-z=xe^x\ln|x|-xe^x+C_1xe^x+C_2e^x}$$

(ב) מהסעיף הקודם ניתן לראות ש $\begin{cases} y_1=e^x \\ y_2=xe^x \end{cases}$ פתרונות עבור המד"ר ההמומוגנית הקשורה הוורונסקיאן הוא

$$W(y_1,y_2)=...=e^{2x}\ (\neq 0)$$

פונקציית גרין של הבעיה היא:

$$G(x,t)=\frac{y_1(t)\,y_2(x)-y_1(x)\,y_2(t)}{W(t)}=\frac{e^txe^x-e^xte^t}{e^{2t}}\Rightarrow G(x,t)=e^{x-t}(x-t)$$

$$y=\int_0^x(x-t)\,e^{x-t}f(t)\,dt$$

(ג) נבדוק האם זה אפשרי:

$$y=\int_0^x e^{x-t}(x-t)\,\frac{e^t}{t}dt=\int_0^x\frac{e^x(x-t)}{t}dt$$

זה מתבדר, לכן התשובה היא לא!