תרגיל 6

שאלה 1

יהיו $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, $f\colon X\to\mathbb{R}$ פונקציה ב־$L^1(\mu)$. לכל $t\in\mathbb{R}$ נגדיר:

$$F(t):=\int_X f(x)\cos\left(e^t f(x)\right)d\mu(x)$$

הוכיחו כי F מוגדרת ורציפה ב־$\mathbb{R}$.

שאלה 2

יהיו $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, $a\in(0,\infty)$, $f\colon X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה כך ש:

$$0<c:=\int_X fd\mu<\infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)d\mu=\begin{cases} c & a=1\\ \infty & 0<a<1\\ 0 & 1<a<\infty\end{cases}$$

תזכורת: אם $0\le t$ ו־ $a\ge 1$ אז $1+t^a\le(1+t)^a\le e^{at}$.

שאלה 3

יהי (X,S,μ) ממ"ח סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית היא אינטגרבילית אסם

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\{x\ :\ f(x)\geq n\}\right)<\infty.$$

שאלה 4

יהי (X,S,μ) ממ"ח סופית ותהי $f\in L^1(\mu)$ אי שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\int_X f^\alpha d\mu=\int_X f d\mu.$$

שאלה 5

יהי (X,S,μ) ממ"ח σ־סופי. נניח כי $f:X\to\mathbb{R}$ הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\epsilon>0$ אזי קיימת $A\in S$ כך ש $\mu(A)<\infty$ ומתקיים

$$\epsilon+\int_A f d\mu>\int_X f d\mu.$$