תרגיל בית 1 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). תהי G חבורה עם איבר יחידה e. יהי $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$, אז $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש-$ab = e$, אז $ba = e$ ו-$b = a^{-1}$.

שאלה 2. בכל סעיף, ענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:
האם היא אגודה?
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?
האם היא חבורה?
האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N}, \cdot)$, המספרים הטבעיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ב. $(\mathbb{Z}, \max)$, המספרים השלמים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ג. $(2\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים הזוגיים עם הפעולה $a * b = a + b - 2$.

ד. תהי X קבוצה. $(P(X), \triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ה. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ו. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ז. $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a * b = a + b + ab$.

שאלה 3. תהינה $(G, *)$ ו-$(H, \bullet)$ חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G \times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

לכל $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$.

א. הוכיחו כי $G \times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו-H.

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G \times H$ אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

שאלה 4. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2 b^2$.

שאלה 5 (רשות)**.** הוכיחו שאם באגודה S לכל משוואה מן הצורה $ax=b$ או $xa=b$ יש פתרון במשתנה x, אז S היא חבורה.
רמז: לפי ההנחה יש איבר $e\in S$ (התלוי ב-a) כך ש-$ae=a$. לכל $c\in S$ קיים x כך ש-$xa=c$, ואז $ce=xae=xa=c$, ולכן e הוא איבר יחידה מימין. באופן דומה יש איבר יחידה משמאל.

בהצלחה!