פתרון שיעורי בית 1

.

1. הציגו את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$

(ב) $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$

פתרון:

$$a = (1,5)(2,6)(3,4), b = (1,2)(3,6)(4,5)$$

(ג) חשבו: $a^2\ , b^2, bab^{-1}, ab$

פתרון: מכיוון שהצלחנו לפרק אותם למחזורים זרים מאורך 2 נקבל: $b = b^{-1}$ $a = a^{-1}$, ולכן : $a^2 = b^2 = e$.

בנוסף, מחישוב נקבל: $bab^{-1} = bab = (1\,3)\,(2\,4)\,(5\,6)$, $ab = (1\,6\,4)\,(2\,5\,3)$.

(ד) כמה תמורות $x \in S_6$ קיימות המקיימות את השיוון $ax = b$? מצאו אותן.

פתרון: נכפיל את השיוון ב a^{-1} משמאל ונקבל כי קיים x יחיד כזה שהוא $x = a^{-1}b = ab = (1,6,4)(2,5,3)$.

2. חשבו:

(א) $((1,2,3)(2,5,3)(1,4))^4$

(ב) $((1,3,5,2,4,7)(6,8))^5$

פתרון:

א. מתקיים: $((1,2,3)(2,5,3)(1,4))^4 = ((1,4,2,5))^4 = id$.

ב. תמורות זרות מתחלפות, ולכן: $((1,3,5,2,4,7)(6,8))^5 = ((1,3,5,2,4,7))^5\,((6,8))^5 = (1,7,4,2,5,3)(6,8)$.

3. תהא $\sigma \in S_n$. ויהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכיחו כי

(א) $\sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_m^k$ לכל k טבעי.

פתרון: מתקיים כי $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$ כי $\tau_1 \cdots \tau_m \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = id$. בנוסף, המספרים המופיעים ב τ_i הם אותם מספרים המופיעים ב τ_i^{-1} ולכן המחזורים $\tau_m^{-1}, \ldots, \tau_1^{-1}$ זרים ולכן מתחלפים. ומכאן נקבל

$$\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = \sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$$

בשיקול דומה, כיוון ש $\tau_1, \ldots, \tau_m$ זרים הם מתחלפים ולכן אפשר לקבץ אותם. כלומר

$$\sigma^k = (\tau_1 \cdots \tau_m)(\tau_1 \cdots \tau_m) \cdots (\tau_1 \cdots \tau_m) = (\tau_1 \cdots \tau_1)(\tau_2 \cdots \tau_2) \cdots (\tau_m \cdots \tau_m) = \tau_1^k \cdots \tau_m^k$$

(ג) תנו דוגמא ל$\sigma \in S_n$ שניתן להציגה כמכפלה של מחזורים (לא בהכרח זרים) $\sigma = \tau_1, \ldots, \tau_m$ כך ש:

i. $\sigma^{-1} \neq \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$

ii. קיים k טבעי כך ש $\sigma^k \neq \tau_1^k \cdots \tau_m^k$

פתרון: נתסכל על $(1,2,3) = (1,2)(2,3) \in S_3$ מתקיים

$$(1,2,3)^{-1} = (3,2,1) \neq (1,2)^{-1}(2,3)^{-1} = (1,2)(2,3) = (1,2,3)$$

וגם

$$(1,2,3)^2 = (1,3,2) \neq (1,2)^2 (2,3)^2 = id$$

.4

(א) הוכיחו פורמאלית כי עבור מחזור $(i_1, \ldots, i_m) \in S_n$ מתקיים כי

$$(i_1, \ldots, i_m) = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)$$

הוכיחו זאת ע"י בדיקה מפורשת כי לכל $x \in \{1, \ldots, n\}$ מתקיים כי

$$(i_1, \ldots, i_m)[x] = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)[x]$$

פתרון: נראה ששתי הפונקציות משני צדדי המשוואה שולחות כל $x \in \{1, \ldots, n\}$ לאותו מקום. אכן, יהא $x \in \{1, \ldots, n\}$.

אם $x = i_k$ (לאיזה שהוא $k < m$) אזי

$$(i_1, \ldots, i_m)[i_k] = i_{k+1} = (i_k, i_{k+1})[x] = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)[x]$$

כי החילופים זרים (נובע מכך ש $(i_1, \ldots, i_m)$ מחזור).

אם $x = i_m$ אזי

$$(i_1, \ldots, i_m)[i_m] = i_1 = (i_1, i_2)[i_2] = (i_1, i_2)(i_2 i_3)[i_3] = \ldots = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{m-1} i_m)[i_m]$$

אחרת $x \neq i_k$ לכל k ואז

$$\left(i_1,\ldots,i_m\right)[x]=x=\left(i_1,i_2\right)\left(i_2 i_3\right)\ldots\left(i_{m-1} i_m\right)[x]$$

כי x מופיע במחזור מאורך 1

(ב) הראו כי לכן כל תמורה $\sigma \in S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים, וכי הצגה זאת אינה יחידה.

פתרון: תהא σ תמורה. אזי היא ניתנת להצגה כמכפלה של מחזורים זרים $\sigma=\Pi_{i=1}^m \sigma_i$ ולכל i המחזור $\sigma_i=\Pi_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}$ ניתן להצגה כמכפלה של חילופים לפי סעיף קודם ולכן גם

$$\sigma=\Pi_{i=1}^m \sigma_i=\Pi_{i=1}^m \Pi_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}$$

ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים.
דרך נוספת להציג את היא

$$\sigma=\Pi_{i=1}^m \sigma_i=\Pi_{i=1}^m \Pi_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}=\Pi_{i=1}^m \Pi_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}(1,2)(1,2)$$

5. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נגדיר את התומך שלה להיות:

$$\operatorname{supp}(\sigma)=\{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

במילים: אוסף המספרים שאותם σ"מזיזה". נאמר ששתי תמורות, σ,τ, הן זרות אם $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau)=\varnothing$.

(א) תנו דוגמא לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

(ב) תנו דוגמא לתמורות לא זרות שמתחלפות.

פתרון: א. למשל: $a=(1,2), b=(2,3,4)$. נקבל: $ab=(1,2,3,4) \neq(1,3,4,2)=ba$.

ב. ניקח מחזור וההופכי שלו, והוא הופכי משני הצדדים, ולכן מתחלף, והם כמובן לא זרים. למשל: $a=(1,3,2), b=(1,2,3)$.

(ג) הוכיחו שאם $i \in \operatorname{supp}(\sigma)$ אז גם $\sigma(i) \in \operatorname{supp}(\sigma)$.

פתרון : נניח $i \in \operatorname{supp}(\sigma)$. זאת אומרת $i \neq \sigma(i)$. כעת, אם בשלילה $\sigma(i) \notin \operatorname{supp}(\sigma)$, זאת אומרת ש־ $\sigma(\sigma(i))=\sigma(i)$, כלומר, המספר $\sigma(i)$ נשלח לעצמו (קוראים לזה נק' שבת). אבל אז נקבל ש σ לא חח"ע, כי:

$$i \neq \sigma(i) \wedge \sigma(i)=\sigma(\sigma(i))$$

בסתירה להיותה תמורה.

6. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $\left(i_1, i_2, \ldots i_m\right) \in S_n$ הוכיחו כי מתקיים השיוויון הבא:

$$\sigma\left(i_1, i_2, \ldots i_m\right) \sigma^{-1}=\left(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m)\right)$$

למשל, אם $\sigma=(1,2)(4,5)$ מתקיים כי

$$\sigma(2,3,5,6)\sigma^{-1}=(1,3,4,6)$$

פתרון : ע"י הכפלה מימין ב σ ומשמאל ב σ^{-1} שקול להוכיח כי

$$(i_1,i_2,\dots i_m)=\sigma^{-1}(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m))\sigma$$

יהא $x\in\{1,2,\dots,n\}$ צריך להוכיח כי שתי הפונקציות (משני צידי השיוויון) מעתיקות אותו לאותו מספר.

אם $x\in\{i_1,\dots i_m\}$ אזי $x=i_k$ כלשהוא ואז

$$\sigma^{-1}(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m))\sigma(i_k)=\sigma^{-1}(\sigma(i_{k+1}))=i_{k+1}$$

(אם $k=m$ אז נחליף את $m+1$ ב־1)

ומצד שני

$$(i_1,i_2,\dots i_m)(i_k)=i_{k+1}$$

ויש שיוון.

אם $x\notin\{i_1\dots i_m\}$ אזי

$$\sigma^{-1}(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m))\sigma(x)=\sigma^{-1}\sigma(x)=x$$

התמורה $(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m))$ שולחת את $\sigma(x)$ לעצמו כי אחרת $\sigma(x)=\sigma(i_k)$ וכיוון שזוהי תמורה (בפרט חח"ע) זה גורר כי $x=i_k$ סתירה.

ומצד שני

$$(i_1,i_2,\dots i_m)(x)=x$$

7. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
כלומר $\sigma=\prod_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.
אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=(1,2,3,\dots,n),\sigma_2=(1,2)$.

(א) הראו כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: שאלה 6 יכול להיות לעזר)

פתרון : יהיה $(1,i)$ חילוף. מתקיים
$\tau=\sigma_2\sigma_1=(2,3\dots,n)$ ואז $\tau^{i-2}(2)=i$ בנוסף $\tau^{i-2}(1)=1$.
נסמן $\tau'=\tau^{i-2}$ואזי לפי תרגיל 6 מתקיים $\tau'\sigma_2(\tau')^{-1}=(\tau'(1),\tau'(2))=(1,i)$.

(ב) הראו שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$

פתרון :

שוב, לפי שאלה 6 מתקיים כי $(i,j)=(1,i)\,(1,j)\,(1,i)$.

(ג) הוכיחו את הטענה.

פתרון : כל $\sigma\in S_n$ ניתן להציגה כמכפלה של חילופים. לפי סעיפים קודמים:

כל חילוף נביע בעזרת מכפלה של שתי חילופים $(1,k)\,(1,k')$.

כל מכפלה כזאת נביע באמצעות $\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}$ שזה אכן מכפלה שמעורבים בה רק תמורות מתוך $\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.