שעת קבלה

26 באוגוסט 2021

1. הוכחת המשפט: יחס שקילות אמ"ם חלוקה.

(א) תהי A קבוצה, R יחס שקילות עליה, אזי קבוצת המנה $A/R = \{[a] \,|a \in A\}$ היא חלוקה המקיימת שהיחס המושרה ממנה הוא R:

$$R = \bigcup_{a \in A} ([a] \times [a])$$

הוכחה: ראשית זו חלוקה כי:

האיחוד זה כל A: ברור שמתקיים $\bigcup_{a \in A} [a] \subseteq A$ כי זה איחוד על פני תתי־קבוצות של A. מצד שני, יהי $a \in A$, אזי $a \in [a]$, ולכן $a \in \bigcup_{a \in A} [a]$.

אף קבוצה בחלוקה לא ריקה: תהי $[a] \in A/R$, אזי מכיון ש־ $a \in [a]$ נקבל שאיננה ריקה.

זרות בזוגות: תהיינה $[a], [b] \in A/R$. הוכחנו בהרצאה $[a] = [b] \vee [a] \cap [b] = \emptyset$, אז אם הם שווים, זה אותה קבוצה בחלוקה, ואם לא זרות, ולכן זרות בזוגות.

כעת נראה שהיחס המושרה מהחלוקה הוא R:

$\subseteq$: יהי $(a, b) \in R$, ולכן נקבל $a, b \in [a]$, ולכן $(a, b) \in [a] \times [a]$, ולכן גם לאיחוד הכללי.

$\supseteq$: יהי $(a, b) \in \bigcup_{a \in A} ([a] \times [a])$, זאת אומרת שקיים $a_0 \in A$ כך ש־ $(a, b) \in [a_0] \times [a_0]$, זאת אומרת $a, b \in [a_0]$, ולכן נקבל: $aRa_0 \wedge a_0Rb$ ומטרנזיטיביות נקבל aRb, ולכן $(a, b) \in R$.

(ב) בהינתן חלוקה $\{A_i\}_{i \in I}$ של קבוצה A, אז היחס המושרה $R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ הוא שקילות, ומתקיים: $A/R = \{A_i\}_{i \in I}$.

(ג) במילים אחרות, קיימת פונקציה הפיכה מקבוצת יחסי השקילות על A לקבוצת החלוקות על A המוגדרת:

$$f(R) = A/R$$

בחלק הראשון הוכחנו שאכן קבוצת המנה היא חלוקה.

חח"ע: נניח $R \neq S$ יחסי שקילות על A. לכן לצורך העניין יש $(a, b) \in R \setminus S$.

נקבל $b \in [a]_R$ אך $b \notin [a]_S$, ולכן $[a]_R \neq [a]_S$. בנוסף, האיבר $[a]_S$ לא יכול להיות מחלקת שקילות כלשהי ב־R, כי $a \in [a]_S$ ואילו $b \notin [a]_S$, ולכן אין $c \in A$ כך ש־ $[c]_R = [a]_S$ כי אחרת $a \in [c]_R$, ולכן $b \in [c]_R = [a]_S$, ולכן $[a]_S \in {}^{A}/_{S} \setminus {}^{A}/_{R}$, ולכן החלוקות שונות.

על: תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ חלוקה של A: אז היחס $R = \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$ הוא שקילות (תוכיחו בעצמכם אח"כ) המקיים $f(R) = {}^{A}/_{R} = \{A_i\}_{i\in I}$, בקצרה: לכל $a \in A$ יש $i \in I$ יחיד כך ש־ $a \in A_i$, ואז $[a] = A_i$.

2. מועד ב תשעט, שאלה 2: נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}$ ע"י:

$$aSb \iff a - b \in \mathbb{Z}$$

(א) הוכיחו שזהו יחס שקילות ־ לבד.

(ב)

$$[0] = \mathbb{Z}$$

$$[0.5] = 0.5 + \mathbb{Z}$$

(ג) הפרכה: $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \notin S$ כי $\frac{1}{4} - \frac{-1}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, ולכן גם מחלקות השקילות שונות (ויותר מזה, זרות).

(ד) טענה: $|{}^{\mathbb{R}}/_{S}| = \aleph$. הוכחה: נגדיר פונקציה $f : [0,1) \to {}^{\mathbb{R}}/_{S}$ ע"י $f(x) = [x]$.
חח"ע: יהיו $x \neq y \in [0,1)$ אזי $x \in [x]$, נראה $x \notin [y]$ ואז נקבל $f(x) = [x] \neq [y] = f(y)$. ואכן: מכיון ש־ $0 < |x-y| < 1$, ולכן $x - y \notin \mathbb{Z}$, ולכן $(x,y) \notin S$ מה שאומר $x \notin [y]$.
על: יהי $[x] \in {}^{\mathbb{R}}/_{S}$. נגדיר $y = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$ ונקבל $x - y = x - x + \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, ולכן xSy ולכן $[y] = [x]$, ואז נקבל $f(y) = [y] = [x]$.

3. $f : X \to Y$ פונקציה $B \subseteq Y$ מה התנאי לכך ש־ $B = f[f^{-1}[B]]$?
תשובה: התנאי הוא: f על.

4. תש"פ מועד א, שאלה 6:

(א) נגדיר יחס R_1 על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י:

$$fR_1g \iff f^{-1}[\{1\}] = g^{-1}[\{1\}]$$

תהי $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. חשבו את $|[f]_{R_1}|$.
פתרון: נחלק למקרים:

i. אם $f^{-1}[\{1\}] = \mathbb{N}$. זאת אומרת שמתקיים: $\forall n : f(n) = 1$, ולכן אם $g \in [f]_{R_1}$ אז נדרש $g^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{1\}] = \mathbb{N}$ מה שאומר $\forall n : g(n) = 1$ מה שאומר $f = g$. בכך הוכחנו $[f]_{R_1} \subseteq \{f\}$. ההכלה בכיוון השני ברורה כי תמיד $f \in [f]_{R_1}$. קיבלנו:

$$[f]_{R_1} = \{f\}$$

ולכן העוצמה היא 1.

ii. $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[\{1\}]$ קבוצה סופית לא ריקה נסמן את גודלה ב־ k. אז נגדיר פונקציה

$$\varphi : [f] \to \mathbb{N} \setminus \{1\}^{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[\{1\}]}$$

ע"י:

$$\varphi(g) = g \mid_{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[\{1\}]} : \mathbb{N} \setminus f^{-1}[\{1\}] \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

מתקיים: φ חח"ע ועל, ולכן:

$$|[f]_{R_1}| = \aleph_0^k = \aleph_0$$

iii. $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[\{1\}]$ קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, נגדיר φ בדיוק כמו במקרה הקודם, ונקבל:

$$|[f]_{R_1}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

5. משפט $\beta \cdot \beta = \beta$. בגלל שיודעים $|D \times D| = |D|$, אז מקבלים:

$$|D \times D'| = |D' \times D| = |D' \times D'| = |D|$$

זה נובע מכך ש־ $|D'| = |D|$, ושאם $|A| = |A'|, |B| = |B'|$ אז $|A \times B| = |A' \times B'|$.
כעת לגבי האיחוד:

$$|D \times D' \cup D' \times D \cup D' \times D'| = |D|$$

בגלל שסכום קטן שווה מכפל (צריך להשתמש בזה פעמיים).

6. מועד ב תשעח שאלה 2ג: היח T על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המוגדר ע"י:

$$fTg \iff \exists y \forall x : (x > y) \Rightarrow (f(x) = g(x))$$

רפלקסיבי: אכן, ניקח $y=0$, ולכל x מתקיים שאם $y<x$ אז $f(x)=f(x)$, ולכן fTf.
סימטריות: נניח fTg. זאת אומרת שיש y כך שלכל $y<x$ מתקיים: $f(x)=g(x)$. אז ניקח y זה ונקבל שלכל $y<x$ מתקיים $g(x)=f(x)$, ולכן gTf.
טרנזיטיביות: נניח $fTg \wedge gTh$. זאת אומרת שיש y_1 כך שלכל $y_1<x$ מתקיים $f(x)=g(x)$. בנוסף, יש y_2כך שלכל $y_2<x$ מתקיים $g(x)=h(x)$. לכן נוכל לקחת $y=\max\{y_1,y_2\}$, ואז נקבל שלכל $y<x$ מתקיים $y_1,y_2<x$ ולכן $f(x)=g(x)=h(x)$, ולכן fTh.
טענה:

$$|[f=\{(x,2x)\mid x\in\mathbb{R}\}]|=2^{\aleph}$$

הוכחה לפי קש"ב: ברור ש $|[f=\{(x,2x)\mid x\in\mathbb{R}\}]|\leq 2^{\aleph}$ מכיון שהוא תת קבוצה של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ שמעוצמה $2^{\aleph}$.
בכיוון השני. נגדיר $\varphi:\mathbb{R}^{(-\infty,0]}\to[f]$ ע"י:

$$\varphi(g)=g\cup\{(x,2x)\mid x>0\}$$

או במילים אחרות:

$$\varphi(g)(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ g(x) & x\leq 0\end{cases}$$

נקבל φ חח"ע, כי אם $g\neq h:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ אז יש $x\leq 0$ כך ש- $g(x)\neq h(x)$, ואז נקבל שגם

$$\varphi(g)(x)=g(x)\neq h(x)=\varphi(h)(x)$$

ולכן

$$|[f]|\geq|\mathbb{R}^{(-\infty,0]}|=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$$

7. תשע"ו מועד א שאלה 5: חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:
   (א) $P(P(\mathbb{N}))$ והתשובה:

$$2^{\aleph}$$

   (ב) קבוצת הפונקציות מ$P(\mathbb{N})$ ל $\mathbb{N}$ שהן חח"ע:
   0, מכיון שאין פונקציות חח"ע, כי הרי $|\mathbb{N}|<|P(\mathbb{N})|$

(ג) כל הפונקציות העל מהטבעיים ל- $\{1,2\}$
התשובה היא: $2^{\aleph_0} = א$. הוכחה: פנוקציה $f:\mathbb{N}\to\{1,2\}$ איננה על אמ"ם f קבועה 1 או 2, ולכן:

$$|C| = |\{1,2\}^{\mathbb{N}} \setminus \{c_1, c_2\}| = |\{1,2\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} = א$$

(ד) $D = \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2=1\}$.
תשובה: א. לפי קשב:

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

ולכן $|D| \leq א \cdot א = א$.
מצד שני נגדיר $f:[-1,1]\to D$ ע"י:

$$f(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$

חח"ע בזכות הרכיב הראשון.

8. מועד א תשע"ח, שאלה 2: על הקבוצה $A = P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ נגדיר יחד R ע"י:

$$fRg \iff \forall n: f(n) \subseteq g(n)$$

(א) זהו סדר. משאיר לכם, ומי שמסתבך מוזמן לשלוח מייל.
(ב) האם מלא? לא, כי למשל שתי הפונקציות הבאות לא מתייחסות אחת לשנייה:

$$\forall n: f(n) = \{1,2\}$$

$$\forall n: g(n) = \{3,4\}$$

מכיון שעבור למשל $n=1$ נקבל $f(1)\not\subseteq g(1) \wedge g(1)\not\subseteq f(1)$, ולכן $(f,g)\notin R \wedge (g,f)\notin R$.
(ג) האם יש איבר גדול ביותר? כן:

$$\forall n: f(n) = \mathbb{N}$$

הוכחה: תהי $g:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ אז מתקיים:

$$\forall n: g(n) \subseteq \mathbb{N} = f(n)$$

(ד) האם בקבוצה $X = \{f \in A : \forall n : n \in f(n)\}$ יש קטן ביותר? כן:

$$f(n) = \{n\}$$

הוכחה: תהי $g \in X$ אזי נקבל:

$$\forall n : n \in g(n)$$

ולכן:

$$\forall n : f(n) = \{n\} \subseteq g(n)$$

ולכן fRg ולכן לפי הגדרה f איבר קטן ביותר.

(ה) תהי

$$D = \{f \in A \mid \forall n \in \mathbb{N} : f(n) \subsetneqq f(n+1)\}$$

נניח בשלילה ש־ f_m איבר קטן ביותר. נשים לב ש־

$$\forall n : |\mathbb{N} \setminus f_m(n)| = \aleph_0$$

נגדיר:

$$g(n) = \begin{cases} \emptyset & n = 1 \\ G_n & n > 1 \end{cases}$$

כאשר G_n הם n האיברים הקטנים ביותר ב־ $\mathcal{K} = \mathbb{N} \setminus f(2)$. ואז נקבל ש $f_m(2) \cap g(2) = \emptyset$, ואילו $f_m(2), g(2) \neq \emptyset$, מה שאומר $f_m(2) \nsubseteq g(2) \wedge g(2) \nsubseteq f_m(2)$ בסתירה לקטנות ביותר של g (כמובן, במבחן צריך להוכיח $g \in D$).