אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 7

19 בינואר 2019

1. מצאו את כל הערכים האפשריים למספרים הבאים:

(א) 2^i

(ב) $(1+i)^{2i}$

<u>**פתרון:**</u>

א. נרשום את הצורה הפולארית של הבסיס, באופן כללי: $2 = 2\text{cis}(0+2\pi k), k \in \mathbb{Z}$. כעת נקבל מההגדרה של חזקה מרוכבת:

$$2^i = (2\text{cis}(0+2\pi k))^i = e^{i\cdot L(2\text{cis}(2\pi k))} = e^{i\cdot(\ln 2 + i\cdot 2\pi k)} = e^{2\pi k + i\ln 2} = e^{2\pi k}\text{cis}(\ln 2)$$

ב. באותו אופן, $1+i = \sqrt{2}\text{cis}(\frac{\pi}{4}+2\pi k) = \sqrt{2}\text{cis}\frac{9\pi k}{4}$, ולכן:

$$(1+i)^{2i} = e^{2i\cdot L(\sqrt{2}\text{cis}\frac{9\pi k}{4})} = e^{2i\cdot(\ln\sqrt{2}+\frac{9\pi k}{4}i)} = e^{-\frac{9\pi k}{2}+2\ln(\sqrt{2})i} = e^{-\frac{9\pi k}{2}}\text{cis}(2\ln\sqrt{2})$$

2. מצאו פתרון כללי של המד"ר הבאות:

(א) $y' + y\tan x = 0$. (הדרכה לאינטגרל: מה זה $\int\frac{f'}{f}$?)

(ב) $y' + y\sin x = 0$.

(ג) $y' + y = xe^x$.

<u>**פתרון:**</u>

א. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \tan x$. נמצא תחילה את $A(x) = \int a(x)dx = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$. ניזכר בגזירה הבאה:

$$(\ln(f(x))' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'}{f}$$

ולכן $\int\frac{f'}{f} = \ln|f|$. אצלנו נוסיף פעמיים מינוס כדי לקבל את הצורה הזו:

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int -\frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$$

כעת נציב בנוסחא: $y = ce^{-A(x)} = ce^{\ln|\cos x|} = c\cdot|\cos x|$.

ב. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \sin x$. הפתרון הוא: $y = ce^{-\int\sin x dx} = ce^{\cos x}$.

ג. זו מד"ר ליניארית לא הומוגנית עם $a(x) = 1, b(x) = xe^x$. הפתרון הוא:

$$y = e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}dx + c\right) = e^{-x}\left(\int xe^xe^xdx + c\right) = e^{-x}\left(\int xe^{2x}dx + c\right)$$

נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int xe^{2x}dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^{2x}g = \frac{1}{2}e^{2x}\} = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4}$$

לכן התשובה היא:

$$y = e^{-x}(e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4} + c) = e^{x} \cdot \frac{2x-1}{4} + ce^{-x}$$

3. מצאו פתרון פרטי של המד"ר הבאות, עם תנאי ההתחלה המתאימים:

(א) $\begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(1) = 1 \end{cases}$. (הדרכה לאינטגרל: שיטת ההצבה)

(ב) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

(ג) $\begin{cases} y' - \frac{y}{x^2} = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$.

<u>פתרון:</u>

א. זו מד"ר ליניארית מסדר ראשון לא הומוגנית. $a(x) = 2x, A(x) = \int a(x) = x^2, b(x) = 2x$, לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}dx + c\right) = e^{-x^2}\left(\int 2xe^{x^2}dx + c\right) = \{t = x^2, dt = 2xdx\} = e^{-x^2}\left(\int e^{t}dt + c\right) = e^{-x^2}(e^{t}+c)$$

עכשיו נחזיר את ההצבה אחורה ונקבל

$$y = e^{-x^2}(e^{x^2} + c) = 1 + ce^{-x^2}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1 = 1 + ce^{-1}$$

$$ce^{-1} = 0$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = 1$$

ב. באותו אופן: $a(x) = \frac{1}{x}, A(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln x, b(x) = e^{x}$. לכן: $y = e^{-\ln x}(\int e^{x}e^{\ln x}dx + c) = \frac{1}{x}(\int xe^{x}dx + c)$.

נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int xe^{x}dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^{x}g = e^{x}\} = xe^{x} - \int e^{x}dx = e^{x}(x-1)$$

נחזור לתרגיל:

$$y = \frac{1}{x}(e^{x}(x-1) + c) = \frac{c + e^{x}(x-1)}{x}$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = \frac{c + e(1-1)}{1} = c$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = \frac{e^x(x-1)}{x}$$

ג. כאן היא הומוגנית עם $A(x) = \frac{1}{x}$, $a(x) = -\frac{1}{x^2}$, ולכן: $y = ce^{-A(x)} = ce^{-\frac{1}{x}}$. נציב תנאי התחלה:

$$e = ce^{-\frac{1}{1}}$$

$$c = e^2$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = e^{2-\frac{1}{x}}$$

בהצלחה!