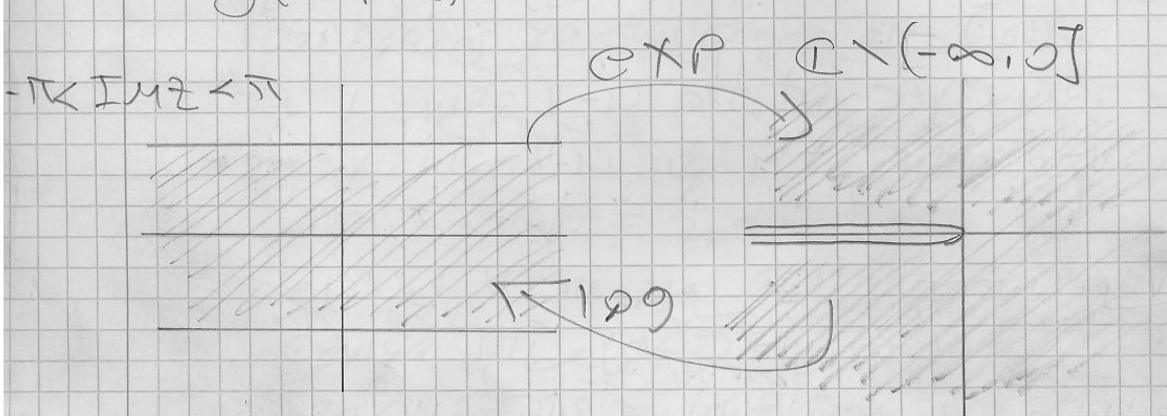
פונקציית הלוגריתם: הפונקציה

המרוכבת $\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
היא פונקציה חח"ע מהתחום $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$
על התחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ולכן קיימת פונ'
חח"ע ועל $\log : \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$
שנקראת הענף העיקרי של הלוגריתם ומקיימת

$$\exp(\log z) = z, \quad z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$$
$$\log(\exp z) = z, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < \pi$$



הפונ' $\log$ מוגדרת בצורה מפורשת כ:

$$\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi.$$

לדוגמא נחשב $\log(3+3i)$. אם $z = 3+3i$
אז $|z| = \sqrt{18}$ ואם $\Theta = \operatorname{Arg} z$ אז

$$\sin\Theta = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\Theta = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן $\Theta = \frac{\pi}{4}$ ו- $\log(3+3i) = \ln\sqrt{18} + i\frac{\pi}{4}$

לדוגמא:

$$\log\left(\cos\tfrac{5}{2}\pi + i\sin\tfrac{5}{2}\pi\right) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

הגדרה: תחום R ש-exp חח"ע בו ואף
אינו חח"ע בשום תחום המכיל אותו ממש
נקרא תחום יסודי של exp.
ל-exp המוגבל לתחום יסודי R יש
פונקציה הפוכה הנקראת הענף של
הלוגריתם המתאים ל-R ומסמנים אותה
ב-L_R.

דוגמה: exp חח"ע בתחום $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$
ומעתיקה היא $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ לכן התחום בו
קיימת ל-exp פונק' הפוכה שנסמן אותה
ב-L_R והיא נתונה בנוסחה המפורשת ב-:

$$L_R(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z,\quad 0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi$$

דוגמא: אם $z = 1-i$ אז $|z| = \sqrt{2}$
ו-$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$ לכן הארגומנט של z הנמצא
בקטע $(0,2\pi)$ הוא $\frac{7\pi}{4}$ ולכן
$L_R(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}$.

משפט: אם L_{R_2}, L_{R_1} הם שני ענפים של
הלוגריתם (כאשר R_1 ו-R_2 תחומים יסודיים)
אזי לכל $z \in D$ עבור סביבה לתחום החיתוך של
L_{R_1} ו-L_{R_2} אז $L_{R_1}(z) = L_{R_2}(z) + 2\pi i k$
עבור k שלם שאינו תלוי ב-z. אוסף הקבוצות
כל הענפים של הלוגריתם מסומנים ב-$\ln(z)$
של פונקציה רב ערכית.

תרגיל - חשב $\ln(1+i)$. קודם כל, הקודם
ראינו ש- $Ln(1-i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{7\pi}{4}$, ולכן
$\ln(1-i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right)$.

תרגיל: חשב $\ln(1+i\sqrt{3})$. נסמן $z=1+i\sqrt{3}$
אז $|z|=2$ ו- $Arg z=\frac{\pi}{3}$, ולכן
$\ln(1+i\sqrt{3})=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$.

חזקה של מספר מרוכב: אם z ו-α
הם מספרים מרוכבים, אז נגדיר $z^\alpha=e^{\alpha\ln z}$.

תרגיל: חשב i^i. קודם נחשב $\ln i$:
$|i|=1$ ו- $Arg i=\frac{\pi}{2}$, ולכן $\ln i=i\frac{\pi}{2}+2\pi ik$

$$i^i=e^{i\ln i}=e^{i\left(i\frac{\pi}{2}+2\pi ik\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$$

תרגיל: חשבו $|(1+i)^{(1+i)}|$. כיוון ש-
$\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik\ (k\in\mathbb{Z})$ נקבל

$$(1+i)^{(1+i)}=e^{(1+i)\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik\right)}$$

$$=e^{\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}-2\pi k+i\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}$$

לכן
$$|(1+i)^{(1+i)}|=e^{\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}-2\pi k}$$
$$=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}$$

פולמאן: חשבו $1^{\sqrt{2}}$

<u>פתרון</u>: $\ln(1)=2\pi ik$ ולכן

$$1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln(1)}=e^{\sqrt{2}(2\pi ik)}=\cos(2\sqrt{2}\pi k)+i\sin(2\sqrt{2}\pi k)$$

<u>בולמאן</u>: נסמן ב- $\sqrt{z}$ את הענף הראשי של השורש הריבועי ($\sqrt{z}=e^{\frac{1}{2}\log z}$ כאשר $\log z$ הוא הענף הראשי של הלוגריתם). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $\sqrt{\log z}$.

<u>פתרון</u>: מהגדרת הפונקציה $\sqrt{z}$ נקבל ש- $\sqrt{\log z}=e^{\frac{1}{2}\log(\log z)}$. כיוון שתחום ההגדרה של $\log$ הוא $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ נדרוש ש- $\log z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, כלומר נדרוש ש- $\ln|z|+i\operatorname{Arg}z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. נבדוק מתי $\ln|z|+i\operatorname{Arg}z$ הוא מספר ממשי אי-חיובי ונוציא את ה-z האלו מתחום ההגדרה. נניח ש- $\ln|z|+i\operatorname{Arg}z=\lambda$ כאשר $\lambda\le 0$ מספר ממשי. מהשוואת החלקים הממשיים והמדומים נקבל ש- $\operatorname{Arg}z=0$ ו- $\ln|z|=\lambda$. כיוון ש- $0\ge\lambda$ נקבל ש- $\ln|z|\le 0$ ולכן $0<|z|\le 1$. לכן ה-zים המקיימים $\operatorname{Arg}z=0$ ו- $0<|z|\le 1$ היא הקטע הממשי $(0,1]$. כמו כן עלינו להוציא את קבוצת ה-zים עבורם $\log z$ אינו מוגדר שהיא הקטע הממשי $(-\infty,0]$. לכן תחום ההגדרה של $\sqrt{\log z}$ הוא $\mathbb{C}\setminus(-\infty,1]$.