חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל 3

שאלה 1

חשבון את החסם העליון והתחתון, מינימום ומקסימום (אם יש) של הקבוצה הבאה:
$A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$.

שאלה 2

יהיו קבוצות לא ריקות $A,B\subseteq\mathbb{R}$, נניח שמתקיים $\forall a\in A,\forall b\in B: a\le b$ (כל איבר ב A קטן שווה מכל איבר ב B).

א.הוכיחו: $\sup A\le\inf B$

ב. נניח שמתקיים שוויון בסעיף א', כלומר, $\sup A=\inf B$. הוכיחו/הפריכו: $A\cap B\neq\phi$.
ג. אם הוכחתם בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף ל A ו B ? אם הפרכתם, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

שאלה 3

יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}$. הוכיחו:

א. אם A,B לא ריקות וחסומות מלעיל אזי גם $A\bigcup B$ לא ריקה וחסומה מלעיל, ומתקיים $\sup\left(A\bigcup B\right)=\max\left\{\sup A,\sup B\right\}$.
ב. אם A,B לא ריקות וחסומות מלעיל אזי $A\bigcap B$ חסומה מלעיל, ואם היא לא ריקה אזי מתקיים $\sup\left(A\bigcap B\right)\le\min\left\{\sup A,\sup B\right\}$.
ג. לגבי סעיף ב', מצאו דוגמא בה השוויון לא מתקיים (כלומר מתקיים $\sup\left(A\bigcap B\right)<\min\left\{\sup A,\sup B\right\}$).

שאלה 4

הוכיחו ישירות <u>על פי ההגדרה</u>:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{3n}=\frac{2}{3}$

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cos\left(n^2\right)=0$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4+\sqrt{n}}=0$

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו על פי השלילה של הגדרת הגבול:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\neq 1$

ב. לכל $L\in\mathbb{R}$ הסדרה $\left(-1\right)^n$ אינה מתכנסת ל- L.

ג. לכל $L\in\mathbb{R}$ הסדרה $n\left(-1\right)^n$ אינה מתכנסת ל- L.

<u>שאלה 6</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$. אילו מהתנאים הבאים שקולים לכך שהסדרה מתכנסת ל- L? הוכיחו שקילות (גרירה כפולה) או הפריכו (באמצעות דוגמא נגדית).

א. לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>n_0$ אז $|a_n-L|<\varepsilon$ (שימו לב: ההבדל בין תנאי זה לבין הגדרת הגבול כפי שהגדרנו בכיתה הוא שכאן אנו דורשים $n>n_0$ במקום $n\geq n_0$).

ב. קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 עבורו לכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<M\cdot\varepsilon$.

ג. לכל $\varepsilon>0$ קיים $M\in\mathbb{R}$ וקיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<M\cdot\varepsilon$.

ד. קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

בהצלחה!