

תרגיל בית 1 אינפי 3

1. יהי $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ הוכיחו כי

$$\frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

רמז: בשביל אחד מצדדי האי שוויון יש להשתמש באי שוויון קושי שורץ.

2. תהי $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ מטריקה. הוכיחו כי הפונקציות הבאות הן גם מטריקות:

$$\alpha(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} \quad (\text{א})$$

$$\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \quad (\text{ב})$$

3. קבעו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות ב \mathbb{R}^2 אם היא פתוחה או אם היא סגורה (

הוכיחו או הפריכו) ומצא את קבוצת נקודות הגבול.

$$A = \{(0, 0), (1, 0)\} \quad (\text{א})$$

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 1)\} \quad (\text{ב})$$

$$C = \{(x, y) \mid 0 < x, y < 0\} \quad (\text{ג})$$

4. האם הקבוצות הבאות פתוחות או סגורות?

$$A = \{(x, y) \mid y = 0, x \in (0, 1)\} \quad (\text{א}) \text{ ב } \mathbb{R}^2$$

$$B = (0, 1) \quad (\text{ב}) \text{ ב } \mathbb{R}$$

5. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ קבוצה. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים.

$$(\text{א}) \text{ קיימים } x_0 \in X \text{ ו } 0 < r \in \mathbb{R} \text{ כך ש } A \subseteq B(x_0, r)$$

$$(\text{ב}) \text{ לכל } x_0 \in X \text{ קיים } 0 < r \in \mathbb{R} \text{ כך ש } A \subseteq B(x_0, r)$$

$$(\text{ג}) \text{ קיים } 0 < M \in \mathbb{R} \text{ כך שלכל } x, y \in A \text{ מתקיים } d(x, y) < M$$

הערה: קבוצה A המקיימת תכונות אלה נקראת חסומה.

6. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

$$(\text{א}) \text{ אם } A \subseteq B \text{ אז } \partial A \subseteq \partial B$$

$$(\text{ב}) \text{ לכל שתי קבוצות } A, B \text{ מתקיים } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(\text{ג}) \text{ לכל שתי קבוצות } A, B \text{ מתקיים } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

7. תהי A קבוצה במרחב מטרי (X, d) . הוכיחו כי קבוצת נקודות הגבול A' היא קבוצה

סגורה.