אינפי 3

תרגול 2

תזכורת:

קבוצה פתוחה:

קבוצה U נקראת פתוחה, אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש: $B(x,r) \subseteq U$.

קבוצה סגורה:

קבוצה שמשלימתה היא קבוצה פתוחה

האם הקבוצות הבאות סגורות? פתוחות?

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לא פתוחה, כי בכל כדור פתוח עם מרכז רציונלי יש נקודות אי־רציונליות. באופן דומה המשלים אינה פתוחה (בכל כדור פתוח עם מרכז אי־רציונלי יש נקודות רציונליות) ולכן לא סגורה.

2. $\{x\}$ בתוך $\mathbb{R}$ עבור $x \in \mathbb{R}$.

לא פתוחה, לכל $r > 0$, $B(x,r) \not\subseteq \{x\}$. לכל $y \in \{x\}^c$ מתקיים $B(y, \frac{|x-y|}{2}) \subseteq \{x\}^c$ לכן המשלים פתוחה ולכן $\{x\}$ סגורה.

המשך תזכורת:

נק' הצטברות:

נאמר ש-x היא נקודת הצטברות של קבוצה A אם לכל סביבה שלה יש לפחות נקודה אחת פרט ל-x השייכת ל-A.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את קבוצת נקודות ההצטברות של הקבוצות הבאות:

1. $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$.

לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $r > 0$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש: $q \in B(x,r)$ ולכן קבוצת נקודות ההצטברות היא כל $\mathbb{R}$.

גבולות של פונקציות ב$-\mathbb{R}^n$

הגדרה: תהי $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$. נאמר שהגבול של f בנקודה a הוא L ונסמן $\lim_{x\to a}f(x)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_1(x,a)<\delta$, אז:

$$d_2(f(x),L)<\varepsilon$$

איך מחשבים גבול של פונקציה?

במשתנה אחד-בדקנו שאיפה לנק' משני כיוונים

בשני משתנים או יותר-יש אינסוף כיוונים שמהם אפשר לשאוף לנק'

בעיה (אתגר)!

מצד אחד: כדי להראות שאין גבול, מספיק להראות שני מסלולים שונים שהגבול בהם שונה. מגוון המסלולים מקל עלינו את הבחירה.

מצד שני: כדי להראות שיש גבול, צריך להראות שכל המסלולים מתכנסים לאותו הגבול

אז איך עושים את זה?!

- משפט הסנדוויץ'
- אריתמטיקה של גבולות
- הצבה של כמה משתנים כמשתנה אחד (ואז חישוב גבול של עם משתנה יחיד)

תרגיל:

חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$.

במסלול $y=0$ נקבל $\frac{3}{2}$ ובמסלול $x=0$ נקבל $\frac{2}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

$\lim x=0$, $\lim \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1$ ולכן בסה"כ הגבול הוא 0.

3. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x+y-z}{2x-5y+2z}$.

במסלול $x=y=0$ נקבל $\frac{1}{2}$–ובמסלול $x=z=0$ נקבל $\frac{1}{5}$–ולכן הגבול אינו קיים.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}$.

נסמן: $t = x - y$, ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2}} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{-|t|}{t^2}} = 0$$

5. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$.

במסלול $x = 0$ נקבל 0.

במסלול $x = y, z = x^2$ נקבל $\frac{1}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|} \cos\frac{1}{y^2}$.

לפי סנדוויץ':

$$0 \leq \left|\frac{x^2}{|x|+|y|} cos\frac{1}{y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right| \leq \left|\frac{x^2}{|x|}\right| = |x| \to 0$$

ולכן הגבול הוא 0.

7. האם הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה?

<u>פתרון:</u>

ברור שהפונקציה רציפה בכל נקודה שאינה $(0,0)$.

בנקודה $(0,0)$ הגבול לא קיים, כי אם נתבונן במסלולים $y=ax$, נקבל:

$$\lim_{x\to0}f(x,ax)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x^3+a^3x^3}{x^2+a^2x^2}=\frac{1}{1+a^2}$$

כלומר הגבול משתנה בהתאם ל$-a$ ולכן הוא לא קיים, ולכן f אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

8. האם ניתן להגדיר את $f\left(x,y\right)=\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$ כרציפה ב–$(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

כן. נסמן: $t=x^2+y^2$ ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=\lim\frac{x^2+y^2}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1$$

ולכן כדי לקבל רציפות נגדיר: $f\left(0,0\right)=1$.

9. <u>תרגיל:</u>

האם הפונקציות הבאות רציפות?

1. $f(x,y)=\begin{cases}\arctan\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2} & (x,y)\neq(0,1)\\ \frac{\pi}{2} & (x,y)=(0,1)\end{cases}$.

בכל נקודה שאינה $(0,1)$ הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות. בנקודה $(0,1)$ נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=\lim_{z\to\infty}\arctan z=\frac{\pi}{2}$$

ולכן הפונקציה רציפה.

.10

$$.f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

במסלול $x=y$ נקבל $\lim_{x\to 0} f(x,x)=1$ ולכן לא רציפה בנקודה $(0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה.

11. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$.

<u>פתרון:</u>

לפי הסנדוויץ':

$$0\le\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{y^2}\right|=|x|+|x|\to 0$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$. שימו לב: הביטוי $x^2+y^2\neq 0$ זהה במשמעותו לביטוי $(x,y)\neq(0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה כמנת רציפות.

12. א. האם הפונקציה:

$$f(x,y) = x\ln\left(x^2+3y^2\right)$$

רציפה ב– $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

בוודאי שלא, היא הרי לא מוגדרת בנקודה זו.

ב. האם ניתן להגדיר את הפונקציה כך שתהיה רציפה ב– $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

נבדוק האם הגבול בנקודה קיים. נסמן: $t^2 = x^2 + 3y^2$, ואז: $x^2 \le t^2$ ולכן $|x| \le |t|$.

לפיכך:

$$0 \le \left|x \ln\left(x^2 + 3y^2\right)\right| = |x| \cdot \left|\ln\left(x^2 + 3y^2\right)\right| \le \left|t \ln t^2\right|$$

וזהו גבול של משתנה אחד, ניתן לחשב אותו בעזרת לופיטל:

$$\lim_{t \to 0} t \ln t^2 = \lim_{t \to 0} \frac{2 \ln t}{\frac{1}{t}} \overset{L}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{2}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

ולכן ניתן להגדיר את הפונקציה כך שתהיה רציפה ב- $(0,0)$: $f(0,0) = 0$.