לינארית 1 (88112), סמסטר חורף תשע, מועד א' -פתרון

1. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ עם $\text{rank}A = m$. הוכיחו/הפריכו:

(א) לכל $b \in \mathbb{F}^m$, למערכת $Ax = b$ קיים פתרון.
פתרון: הוכחה: כיוון ש$\text{rank}A = m$ אזי בצורה מדורגת קנונית אין שורת אפסים (כי יש m שורות ואם היתה שורת אפסים אז $\text{rank}A < m$) ולכן בכל שורה יש איבר מוביל. מכאן שלא יכולה להיווצר שורת סתירה לאחר דירוג $(A|b)$ ולכן יש פתרון (או יחיד או יותר מאחד).

(ב) מתקיים $N(A) = \{0\}$.
פתרון: הפרכה: למשל

$$A = (1, 0)$$

מטריצה מגודל 1×2 עם $\text{rank}(A) = 1$ אבל

$$N(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(ג) מתקיים $R(A) = \mathbb{F}^n$.
פתרון: הפרכה: למשל

$$A = (1, 0)$$

מטריצה מגודל 1×2 עם $\text{rank}(A) = 1$ אבל

$$R(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \neq \mathbb{F}^2$$

(ד) שורות A בת"ל.
פתרון: הוכחה: כיוון ש$\text{rank}A = m$ יש לה m שורות בת"ל. כיוון שלמטריצה יש m שורות כל השורות שלה בת"ל.

(ה) אם $n \neq m$ אז עמודות A ת"ל.
פתרון: הוכחה: כיוון ש$\text{rank}A = m$ אזי $m \leq n$. אם $n \neq m$ אזי $m < n$. בנוסף, כיוון ש$\text{rank}A = m$ המספר המקסימאלי של עמודות של A שהם בת"ל הוא mולכן, כיוון ש $m < n$ נקבל שכל העמודות ת"ל.

2.

(א) בהניתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, הגדירו את הרחבים $N(A), C(A), R(A)$.
פתרון: תסתכלו בהרצאה.

(ב) תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $\text{rank}AB \neq \text{rank}BA$. הוכיחו כי A אינה הפיכה וגם B אינה הפיכה.
פתרון: אם A הפיכה אזי

$$\text{rank}AB = \text{rank}B = \text{rank}BA$$

כי כפל במטריצה הפיכה לא משנה rank. כיוון שנתון $\text{rank}AB \neq \text{rank}BA$ נסיק ש A אינה הפיכה. באופן דומה, אם B הפיכה נקבל ש $\text{rank}AB = \text{rank}A = \text{rank}BA$ בסתירה לנתון ולכן גם B אינה הפיכה.

(ג) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת $A^2 = 0$. הוכיחו $C(A) \subseteq N(A)$.
פתרון: לכל j מתקיים ש $C_j(A) \in N(A)$ מכיוון ש

$$AC_j(A) = C_j(A \cdot A) = C_j(0) = 0$$

ולכן
$$\{C_1(A),\ldots,C_n(A)\}\subseteq N(A)$$
ולכן
$$C(A)=\text{span}\{C_1(A),\ldots,C_n(A)\}\subseteq N(A)$$
כנדרש.

.3

(א) תהיינה מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $C(B)\cap N(A)=\{0\}$. הוכיחו כי $\text{rank}A\geq\text{rank}B$.
פתרון: לפי משפט הדרגה
$$\dim N(A)=n-\text{rank}A$$
ובנוסף, לפי משפט המימדים
$$\begin{aligned}\dim C(B)\cap N(A)&=\dim C(B)+\dim N(A)-\dim(C(B)+N(A))\\&\geq\text{rank}B+(n-\text{rank}A)-\dim\mathbb{F}^n\\&=\text{rank}B-\text{rank}A\end{aligned}$$
מכיוון ש $\dim C(B)\cap N(A)=0$ לפי הנתון, נקבל ש
$$0\geq\text{rank}B-\text{rank}A$$
או
$$\text{rank}A\geq\text{rank}B$$
כנדרש.

(ב) יהא V מ"ו מעל $\mathbb{Z}_2$ (שדה עם 2איברים) ו U ת"מ של V. נניח $\dim V=2$ ו $\dim U=1$. כמה תתי מרחב W שונים יש כך ש
$$V=U\oplus W$$
פתרון: כיוון ש V מימד 2 והשדה הוא $\mathbb{Z}_2$ נקבל שב V יש 4 איברים. ניקח $\{u\}$בסיס ל U וונקבל כי
$$U=\text{span}\{u\}=\{0,u\}$$
וכל $v\in V\backslash\text{span}\{u\}$ יקיים כי v,u בת"ל. מכיוון שבנוסף, $\dim V=2$ נקבל ש
$$V=\text{span}\{u\}\oplus\{v\}$$
ולכן התשובה היא
$$|V\backslash\text{span}\{u\}|=|V\backslash U|=|V|-|U|=4-2=2$$

.4

(א) תהיינה מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו:
$$\dim C(AB)=\dim C(B)-\dim(N(A)\cap C(B))$$
פתרון: נבחר בסיס $\{Bv_1,\ldots,Bv_k\}$ ל$N(A)\cap C(B)$ ונשלים אותו בעזרת $\{Bu_1,\ldots,Bu_r\}$ לבסיס של $C(B)$. צ"ל $\dim C(AB)=r$.
טענה: $\{ABu_1,\ldots,ABu_r\}$ בסיס של $C(AB)$. הוכחה:

- פורש: יהא $ABu \in C(AB)$. אזי $Bu \in C(B)$ ולכן קיים צירוף לינארי

$$Bu = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i B u_i$$

ולכן

$$ABu = A \sum_{i=1}^{r} \alpha_i B u_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i AB u_i$$

וקיבלנו ש ABu אכן צירוף לינארי של $\{ABu_1, \ldots, ABu_r\}$.

- בת"ל: נניח $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i ABu_i = 0$ וצריך להוכיח כי כל המקדמים הם אפס. מהשוויון נקבל

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i ABu_i = A \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B u_i \right)$$

ולכן $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i Bu_i \in N(A)$ מצד שני $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i Bu_i \in C(B)$ ולכן

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B u_i \in C(B) \cap N(A)$$

ולכן קיים צירוף לינארי

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B u_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j B v_k$$

נעביר אגף לקבל

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B u_i - \sum_{j=1}^{k} \beta_j B v_k = 0$$

אבל זהו צירוף לינארי של $\{Bv_1, \ldots, Bv_k, Bu_1, \ldots, Bu_r\}$ שהוא בסיס ל $C(B)$ ובפרט בת"ל ולכן כל מקדמי הצירוף, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, -\beta_1, \ldots, -\beta_k$ שווים אפס. בפרט

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0$$

כנדרש.

(ב) יהא V מ"ו ו A בסיס ל V. הוכיחו שלכל תת קבוצה B של A מתקיים $V = \text{span}B \oplus \text{span}\left(A \backslash B\right)$.
פתרון: יהא B ת"ק של A אזי

- סכום:

$$\text{span}B + \text{span}A \backslash B = \text{span}\left(B \cup (A \backslash B)\right) = \text{span}A = V$$

השיוון האחרון כי A פורשת את V (כי היא בסיס).

- ישר: נניח $v \in \text{span}B \cap \text{span}\left(A \backslash B\right)$ אזי קיימים $b_1, \ldots, b_n \in B$ וקיימים $a_1, \ldots, a_t \in A \backslash B$ כך ש

$$v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$$

וגם

$$v = \sum_{j=1}^{t} \alpha_j a_j$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i = \sum_{j=1}^{t} \alpha_j a_j$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i - \sum_{j=1}^{t} \alpha_j a_j = 0$$

אבל זהו צירוף לינארי של איברי A שהיא בת"ל (כי היא בסיס) ולכן

$$\beta_1 = 0, \ldots, \beta_n = 0, -\alpha_1 = 0, \ldots, -\alpha_t = 0$$

ולכן

$$\beta_1 = 0, \ldots, \beta_n = 0, \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_t = 0$$

כנדרש.