תרגיל 3

1. יהיו R_1, R_2 חוגים. למה איזומורפי $R_1 \times R_2/(\{0\} \times R_2)$? הוכיחו.

2. תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי R ואידיאל $I \trianglelefteq R$ כך ש R/I קומוטטיבי.

3. יהיו R_1, R_2חוגים, ו$I_1 \trianglelefteq R_1, I_2 \trianglelefteq R_2$ אידיאלים. כזכור $I_1 \times I_2 \trianglelefteq R_1 \times R_2$. הוכיחו ש$R_1 \times R_2/I_1 \times I_2 \cong (R_1/I_1) \times (R_2/I_2)$.

4. מצאו n כך ש$\mathbb{Z}[i]/\langle 3+i \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. הוכיחו את האיזומורפיזם.

5. יהי R חוג. נגדיר את המאפיין של R, מסומן ב$\text{char}(R)$, להיות n אם $1+...+1$ n פעמים שווה ל0, ולכן $n > m \in \mathbb{N}$, $1+...+1$ m פעמים לא שווה ל0. אם אין n כזה, נגדיר את המאפיין של R להיות 0. אם המאפיין של R שונה מ0, נגיד שלחוג יש מאפיין סופי. יהי R חוג עם מאפיין סופי, ו$I \trianglelefteq R$.

   (א) הוכיחו ש$\text{char}(R/I) \leq \text{char}(R)$.

   (ב) הוכיחו שלמעשה, $\text{char}(R/I) | \text{char}(R)$.

6. יהי R חוג נסמן ב$R[x]$ את חוג הפולינומים מעל R, כלומר אוסף הביטויים מהצורה $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$עבור n טבעי כלשהו, עם חיבור וכפל טבעיים (שימו לב שx הוא איבר במרכז). הוכיחו ש

$$R[x]/\langle x \rangle \cong R$$

7. יהי R חוג קומוטטבי ו$I \trianglelefteq R$ הוכיחו שהרדיקל של R/I (אוסף האיברים הנילפוטנטים) שווה ל$\sqrt{I}/I = \{x+I : x \in \sqrt{I}\}$ כאשר $\sqrt{I}$ מסמן את הרדיקל של I.