תרגיל בית 10

שאלה 1

פתור את המשוואות המדויקות הבאות:

הערה: בחלק מהסעיפים יש למצוא גורם אינטגרציוני כדי לקבל משוואה מדויקת.

א. $\left(3+y+2y^2\sin^2 x\right)dx+\left(x+2xy-y\sin(2x)\right)dy=0$.

ב. $\left(6x+y^2\right)dx+y(2x-3y)dy=0$.

ג. $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$. פתור בדרך נוספת ובדוק שהתקבלה תשובה זהה.

ד. $\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

פתרון שאלה 1

הערה: כל המשוואות מהצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

נשתמש בסימון $M(x,y),N(x,y)$ כדי לקצר את הרישום בפתרון.

סעיף א

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+4y\sin^2 x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=1+2y-2y\cos 2x.$$

נשים לב: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

$1+2y-2y\cos 2x=1+2y-2y\left(1-2\sin^2 x\right)=1+4y\sin^2 x$ והמשוואה מדויקת.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\ .$$

$$u(x,y)=\int\left(3+y+2y^2\sin^2 x\right)dx=\int\left(3+y+y^2-y^2\cos 2x\right)dx=3x+yx+y^2x-\frac{y^2\sin 2x}{2}+c(y)$$

ואז מצד אחד $\frac{\partial u}{\partial y}=x+2yx-y\sin 2x+c'(y)$ ומצד שני $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$.

נקבל את המשוואה $x+2yx-y\sin 2x+c'(y)=x+2xy-y\sin 2x \Leftarrow c'(y)=0 \Leftarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $3x+yx+y^2x-\frac{y^2\sin 2x}{2}=c$.

סעיף ב

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2y$ והמשוואה מדויקת.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\ .$$

$u(x,y)=\int\left(6x+y^2\right)dx=3x^2+y^2x+c(y)$ ואז מצד אחד $\frac{\partial u}{\partial y}=2yx+c'(y)$ ומצד שני

$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$.

נקבל את המשוואה $2yx+c'(y)=2yx-3y^2 \Leftarrow c'(y)=-3y^2 \Leftarrow c(y)=-y^3$

פתרון המשוואה $3x^2+y^2x-y^3=c$.

סעיף ג

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x+2y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x+y$ והמשוואה לא מדויקת.

יש למצוא פונקציה $\mu(x,y)$ כך שהמשוואה $\mu(x,y)(3xy+y^2)dx+\mu(x,y)(x^2+xy)dy=0$
תהייה מדויקת.

$\mu'_y(3xy+y^2)+\mu(x+y)=\mu'_x(x^2+xy) \Leftarrow \mu'_y(3xy+y^2)+\mu(3x+2y)=\mu'_x(x^2+xy)+\mu(2x+y)$

$\mu'_y(3xy+y^2)+\mu(x+y)=\mu'_x\,x(x+y)$. אם $\mu'_y=0$ נקבל $\mu(x+y)=\mu'_x\,x(x+y)$.

$\mu=x \Leftarrow \mu=x\mu'_x$.

נכפיל בגורם האינטגרציוני ונקבל את המשוואה $(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0$.

נבדוק שאכן המשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2xy, \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2xy$ והמשוואה מדויקת.

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

ואז מצד אחד $u(x,y)=\int(3x^2y+xy^2)dx=x^3y+\frac{x^2y^2}{2}+c(y)$ ומצד $\frac{\partial u}{\partial y}=x^3+x^2y+c'(y)$

שני $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=x^3+x^2y$.

נקבל את המשוואה $c(y)=c \Leftarrow c'(y)=0 \Leftarrow x^3+x^2y+c'(y)=x^3+x^2y$

פתרון המשוואה $x^3y+\frac{x^2y^2}{2}=c$.

<u>סעיף ג דרך נוספת</u>

$$y'=\frac{-3xy-y^2}{x^2+xy} \Leftarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-3xy-y^2}{x^2+xy} \Leftarrow (x^2+xy)dy=(-3xy-y^2)dx \Leftarrow (3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$$

קיבלנו משוואה הומוגנית. נציב $y'=u'x+u \Leftarrow y=ux$.

$$\frac{1+u}{-4u-2u^2}du=\frac{dx}{x} \Leftarrow u'x=\frac{-4u-2u^2}{1+u} \Leftarrow u'x=\frac{-3u-u^2}{1+u}-u \Leftarrow u'x+u=\frac{-3ux^2-u^2x^2}{x^2+ux^2}$$

$$\frac{4y}{x}+\frac{2y^2}{x^2}=\frac{c}{x^4} \Leftarrow 4u+2u^2=\frac{c}{x^4} \Leftarrow \ln\left|4u+2u^2\right|=-4\ln x+\ln c \Leftarrow \frac{4+4u}{4u+2u^2}du=\frac{-4dx}{x}$$

סה"כ נקבל $4x^3y+2x^2y^2=c$. נציב קבוע $c=4c_1$ ונקבל $x^3y+\frac{x^2y^2}{2}=c_1$ כמו התשובה
שהתקבלה כאשר פתרנו בעזרת גורם אינטגרציוני ומשוואה מדוייקת.

<u>סעיף ד</u>

$(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2, \frac{\partial N}{\partial x}=2x$ והמשוואה לא מדויקת.

יש למצוא פונקציה $\mu(x,y)$ כך שהמשוואה

$\mu(x,y)(3x^2y+2xy+y^3)dx+\mu(x,y)(x^2+y^2)dy=0$ תהייה מדויקת.

$$\mu'_y(3x^2y+2xy+y^3)+\mu(3x^2+2x+3y^2)=\mu'_x(x^2+y^2)+2x\mu$$

$$\mu'_y(3x^2y+2xy+y^3)+\mu(3x^2+3y^2)=\mu'_x(x^2+y^2)$$

$\mu'_y(3x^2y+2xy+y^3)+3\mu(x^2+y^2)=\mu'_x(x^2+y^2)$. אם $\mu'_y=0$ נקבל

$\mu=e^{3x} \Leftarrow 3\mu=\mu'_x$.

נכפיל בגורם האינטגרציוני ונקבל את המשוואה $e^{3x}\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+e^{3x}\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

נבדוק שאכן המשוואה מדויקת:

$\frac{\partial N}{\partial x}=3e^{3x}\left(x^2+y^2\right)+2xe^{3x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2e^{3x}+2xe^{3x}+3y^2e^{3x}$ והמשוואה מדויקת.

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

ואז מצד אחד $u(x,y)=\int 3x^2ye^{3x}+2xye^{3x}+y^3e^{3x}dx=x^2ye^{3x}+\frac{y^3e^{3x}}{3}+c(y)$

ומצד שני $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{3x}+y^2e^{3x}+c'(y)$ $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=e^{3x}\left(x^2+y^2\right)$.

נקבל את המשוואה $x^2e^{3x}+y^2e^{3x}+c'(y)=e^{3x}\left(x^2+y^2\right) \Leftarrow c'(y)=0 \Leftarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $x^2ye^{3x}+\frac{y^3e^{3x}}{3}=c$.

<u>שאלה 2</u>

עבור מערכות המשוואות המשוואות הבאות מצאו גם פתרון כללי וגם פתרון המקיים את תנאי ההתחלה:

א. $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}y_1'=7y_1-10y_2\\y_2'=3y_1-4y_2\end{cases}$.

ב. $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}y_1'=-y_1-2y_2\\y_2'=4y_1+3y_2\end{cases}$.

ג. $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{cases}y_1'=y_2\\y_2'=-2y_1+3y_2+3e^x\end{cases}$.

ד. $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{cases}y_1'=4y_1+y_2+e^{6x}\\y_2'=-4y_1+8y_2+6xe^{6x}\end{cases}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix}7&-10\\3&-4\end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{vmatrix}\lambda-7&10\\-3&\lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda+4)+30=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$$.

הערכים העצמיים הם: $\lambda=1,\lambda=2$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-6&10\\-3&5\end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=2$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-5&10\\-3&6\end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $\vec{y}=c_1e^x\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+c_2e^{2x}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

נתון ש $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

מהצבת הנתון בפתרון הכללי נקבל את המשוואות $\begin{cases}5c_1+2c_2=0\\3c_1+c_2=0\end{cases}\Leftarrow c_1=c_2=0$.

פתרון המשוואה הוא $y_1=0, y_2=0$.

<u>סעיף ב</u>

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix}-1&-2\\4&3\end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix}\lambda+1&2\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)+8=\lambda^2-2\lambda+5$.

נפתור את המשוואה $\lambda^2-2\lambda+5=0\Leftarrow \lambda_1=\dfrac{2+\sqrt{-16}}{2}=1+2i$.

הערכים העצמיים הם: $\lambda=1+2i, \lambda=1-2i$.

ניתן להתייחס ל $\lambda=1+2i$ בלבד.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1+2i$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}2+2i&2\\-4&2i-2\end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix}1-i\\-2\end{pmatrix}$.

הפתרון של המערכת הוא

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}1-i\\-2\end{pmatrix}e^{(1+2i)x}=e^x\begin{pmatrix}1-i\\-2\end{pmatrix}(\cos 2x+i\sin 2x)=e^x\begin{pmatrix}(1-i)(\cos 2x+i\sin 2x)\\-2(\cos 2x+i\sin 2x)\end{pmatrix}=$$
$$e^x\begin{pmatrix}\cos 2x+\sin 2x\\-2\cos 2x\end{pmatrix}+ie^x\begin{pmatrix}\sin 2x-\cos 2x\\-2\sin 2x\end{pmatrix}.$$

הפתרון הכללי של המשוואה הוא $\vec{y}=c_1e^x\begin{pmatrix}\cos 2x+\sin 2x\\-2\cos 2x\end{pmatrix}+c_2e^x\begin{pmatrix}\sin 2x-\cos 2x\\-2\sin 2x\end{pmatrix}$

נתון ש $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

מהצבת הנתון בפתרון הכללי נקבל את המשוואות $\begin{cases}c_1-c_2=1\\-2c_1=0\end{cases}\Leftarrow c_1=0, c_2=-1$.

פתרון המשוואה הוא $y_1=e^x(\cos 2x-\sin 2x), y_2=2e^x\sin 2x$.

<u>סעיף ג</u>

נמצא תחילה את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix}\lambda&-1\\2&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)+2=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$.

הערכים העצמיים הם: $\lambda=1,\lambda=2$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=2$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא $\vec{y}=c_1e^x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית.

בתרגול ראינו שיש לפתור את המשוואה $c'_1(x)e^x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c'_2(x)e^{2x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3e^x\end{pmatrix}$

נקבל את מערכת המשוואות

$$\begin{cases}c'_1(x)e^x+c'_2(x)e^{2x}=0\\ c'_1(x)e^x+2c'_2(x)e^{2x}=3e^x\end{cases}\Rightarrow c'_2(x)e^{2x}=3e^x\Rightarrow c'_2(x)=3e^{-x}\Rightarrow c_2(x)=-3e^{-x}.$$

נציב $c'_2(x)=3e^{-x}$ במשוואה הראשונה ונקבל $c'_1(x)e^x+3e^x=0\Rightarrow c_1(x)=-3x$

פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית הוא $\vec{y}=-3xe^x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-3e^x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

פתרון כללי למערכת הלא הומוגנית הוא $\vec{y}=c_1e^x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-3xe^x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-3e^x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

נתון ש $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

מהצבת הנתון בפתרון הכללי נקבל את המשוואות $\begin{cases}c_1+c_2-3=0\\ c_1+2c_2-6=1\end{cases}\Rightarrow c_1=-1,c_2=4$.

פתרון המשוואה הוא $y_1=-4e^x+4e^{2x}-3xe^x,\ y_2=-7e^x+8e^{2x}-3xe^x$.

<u>סעיף ד</u>

$$\begin{cases}y_1'=4y_1+y_2+e^{6x}\\ y_2'=-4y_1+8y_2+6xe^{6x}\end{cases}$$

נמצא תחילה את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix}4 & 1\\ -4 & 8\end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1\\ 4 & \lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-8)+4=\lambda^2-12\lambda+36=(\lambda-6)^2$.

הערך העצמיים הם: $\lambda=6$.

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא מהצורה $\begin{matrix} y_1 = c_1 e^{6x} + c_2 x e^{6x} \\ y_2 = c_3 e^{6x} + c_4 x e^{6x} \end{matrix}$.

נציב במערכת $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 8y_2 \end{cases}$ ונקבל

$$\begin{cases} 6c_1 e^{6x} + c_2 e^{6x} + 6c_2 x e^{6x} = (4c_1 + c_3)e^{6x} + (4c_2 + c_4)x e^{6x} \\ 6c_3 e^{6x} + c_4 e^{6x} + 6c_4 x e^{6x} = (-4c_1 + 8c_3)e^{6x} + (-4c_2 + 8c_4)x e^{6x} \end{cases}.$$

סה"כ נקבל: $\begin{cases} 6c_1 + c_2 = 4c_1 + c_3 \\ 6c_2 = 4c_2 + c_4 \end{cases}$.

מהמשוואה השנייה נקבל $c_4 = 2c_2$.

מהמשוואה הראשונה נקבל: $c_3 = 2c_1 + c_2$.

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא: $\begin{matrix} y_1 = c_1 e^{6x} + c_2 x e^{6x} \\ y_2 = (2c_1 + c_2)e^{6x} + 2c_2 x e^{6x} \end{matrix}$.

או $\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} e^{6x} \\ 2e^{6x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x e^{6x} \\ e^{6x} + 2x e^{6x} \end{pmatrix}$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית.

בתרגול ראינו שיש לפתור את המשוואה $c'_1(x) e^{6x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c'_2(x) e^{6x} \begin{pmatrix} x \\ 1+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{6x} \\ 6x e^{6x} \end{pmatrix}$

נקבל את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} c'_1(x) e^{6x} + c'_2(x) x e^{6x} = e^{6x} \\ 2c'_1(x) e^{6x} + c'_2(x)(1+2x) e^{6x} = 6x e^{6x} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} c'_1(x) + x c'_2(x) = 1 \\ 2c'_1(x) + (1+2x) c'_2(x) = 6x \end{cases} \Leftarrow c'_2(x) = 6x - 2$$

.

$c_2(x) = 3x^2 - 2x \Leftarrow c'_2(x) = 6x - 2$.

נציב $c'_2(x) = 6x - 2$ במשוואה הראשונה ונקבל

$$c_1(x) = -2x^3 + x^2 + x \Leftarrow c'_1(x) = -6x^2 + 2x + 1 \Leftarrow c'_1(x) + 6x^2 - 2x = 1$$

פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית הוא $\begin{cases} y_1 = x^3 e^{6x} - x^2 e^{6x} + x e^{6x} \\ y_2 = 2x^3 e^{6x} + x^2 e^{6x} \end{cases}$.

פתרון כללי למערכת הלא הומוגנית הוא $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{6x} + c_2 x e^{6x} + x^3 e^{6x} - x^2 e^{6x} + x e^{6x} \\ y_2 = (2c_1 + c_2)e^{6x} + 2c_2 x e^{6x} + 2x^3 e^{6x} + x^2 e^{6x} \end{cases}$.

נתון ש $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

מהצבת הנתון בפתרון הכללי נקבל את המשוואות $\begin{cases} c_1 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Leftarrow c_1 = 1, c_2 = -1$.

פתרון המשוואה הוא $y_1 = e^{6x} + x^3 e^{6x} - x^2 e^{6x}, y_2 = e^{6x} - 2x e^{6x} + 2x^3 e^{6x} + x^2 e^{6x}$.

שאלה 3

המר את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות למערכת שקולה עם שלוש משוואות מסדר 1:

א. $y^{(3)} = x^2 y'' - y' \sin x + e^x y + 5$.

ב. $y^{(3)} = 2xy''+y'\sin x + y + \cos x$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = x^2 y_3 - (\sin x) y_2 + e^x y_1 + 5$$

הפתרון של y_1 עבור מערכת המשוואות הוא הפתרון של המשוואה $y^{(3)} = x^2 y''-y'\sin x + e^x y + 5$.

<u>סעיף ב</u>

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = 2xy_3 + (\sin x) y_2 + y_1 + \cos x$$

הפתרון של y_1 עבור מערכת המשוואות הוא הפתרון של המשוואה $y^{(3)} = x^2 y''-y'\sin x + e^x y + 5$.

<u>שאלה 4</u>

המר את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות למערכת שקולה והצג את הפתרון הכללי של המשוואה:

א. $y''-9y = 0$.

ב. $y''+5y'-6y = 0$.

ג. $y''+4y = 0$.

ד. $y''+3y'-4y = \sin(2x)$.

ה. $y''+2y'+y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

המערכת השקולה היא:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 9y_1 \end{cases}$$

נמצא פתרון כללי עבור y_1 .

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -9 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$.

הערכים העצמיים הם: $\lambda = -3, \lambda = 3$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda = 3$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda = -3$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $\vec{y}=c_1e^{3x}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2e^{-3x}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

סה"כ הפתרון הכללי של המשוואה $y''-9y=0$ הוא $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$.

<u>סעיף ב</u>

$y''+5y'-6y=0$

המערכת השקולה היא:

$$\begin{cases}y_1'=y_2\\ y_2'=-5y_2+6y_1\end{cases}$$

נמצא פתרון כללי עבור y_1.

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix}0&1\\6&-5\end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-6&\lambda+5\end{vmatrix}=\lambda^2+5\lambda-6=(\lambda+6)(\lambda-1)$.

הערכים העצמיים הם: $\lambda=-6,\lambda=1$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}1&-1\\-6&6\end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=-6$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-6&-1\\-6&-1\end{pmatrix}$.

נניח $\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $\vec{y}=c_1e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-6x}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$.

סה"כ הפתרון הכללי של המשוואה $y''-9y=0$ הוא $y=c_1e^{x}+c_2e^{-6x}$.

<u>סעיף ג</u>

$y''+4y=0$

המערכת השקולה היא:

$$\begin{cases}y_1'=y_2\\ y_2'=-4y_1\end{cases}$$

נמצא פתרון כללי עבור y_1.

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix}0&1\\-4&0\end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix}\lambda&1\\-4&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+4$.

הערכים העצמיים הם: $\lambda=-2i,\lambda=2i$.

מספיק לבדוק עבור ערך עצמי $\lambda=2i$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=2i$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix}$.

ניקח $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $\vec{y} = ce^{2ix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

יש לחשב את y_1 בלבד.

סה"כ הפתרון הכללי של המשוואה $y''-9y=0$ הוא $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$.

סעיף ד

$y''+3y'-4y = \sin(2x)$

המערכת השקולה היא:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -3y_2 + 4y_1 + \sin(2x) \end{cases}$$

נמצא פתרון כללי עבור y_1.

תחילה נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית המתאימה $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -3y_2 + 4y_1 \end{cases}$

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1)$.

הערכים העצמיים הם: $\lambda=-4, \lambda=1$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

ניקח $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=-4$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

ניקח $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $\vec{y} = c_1e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית.

$c'_1(x)e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c'_2(x)e^{-4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$.

נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} c'_1(x)e^{x} + c'_2(x)e^{-4x} = 0 \\ c'_1(x)e^{x} - 4c'_2(x)e^{-4x} = \sin(2x) \end{cases}$

נקבל ש $5c'_2(x)e^{-4x} = -\sin(2x) \Leftarrow c'_2(x) = \dfrac{-e^{4x}\sin(2x)}{5}$.

נציב $c'_2(x)=\frac{-e^{4x}\sin(2x)}{5}$ במשוואה הראשונה ונקבל

$$c'_1(x)e^{x}-\frac{\sin(2x)}{5}=0 \Leftarrow c'_1(x)=\frac{e^{-x}\sin(2x)}{5}.$$

נחשב $\int e^{4x}\sin(2x)dx$.

$$u=e^{4x} \qquad v=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$u'=4e^{4x} \qquad v'=\sin(2x)$$

$$\int e^{4x}\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)+2\int e^{4x}\cos(2x)dx.$$

נחשב $\int e^{4x}\cos(2x)dx$

$$u=e^{4x} \qquad v=\frac{1}{2}\sin(2x)$$
$$u'=4e^{4x} \qquad v'=\cos(2x)$$

$$\int e^{4x}\cos(2x)dx=\frac{1}{2}e^{4x}\sin(2x)-2\int e^{4x}\sin(2x)dx.$$

נציב במה שקיבלנו קודם

$$\int e^{4x}\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}e^{4x}\cos(2x)+e^{4x}\sin(2x)-4\int e^{4x}\sin(2x)dx$$

$$5\int e^{4x}\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}e^{4x}\cos(2x)+e^{4x}\sin(2x) \Leftarrow \int e^{4x}\sin(2x)dx=-\frac{1}{10}e^{4x}\cos(2x)+\frac{1}{5}e^{4x}\sin(2x)$$

$$c'_2(x)=\frac{-e^{4x}\sin(2x)}{5} \Leftarrow c_2(x)=\frac{1}{50}e^{4x}\cos(2x)-\frac{1}{25}e^{4x}\sin(2x).$$

נחשב $\int e^{-x}\sin(2x)dx$ כמו מקודם ונקבל $\int e^{-x}\sin(2x)dx=-\frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x)$.

$$c'_1(x)=\frac{e^{-x}\sin(2x)}{5} \Leftarrow c_1(x)=-\frac{2}{25}e^{-x}\cos(2x)-\frac{1}{25}e^{-x}\sin(2x)$$

מהפתרון הכללי $\vec{y}=c_1e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-4x}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ נקבל שפתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית הוא

$$y_1=-\frac{2}{25}\cos(2x)-\frac{1}{25}\sin(2x)+\frac{1}{50}\cos(2x)-\frac{1}{25}\sin(2x) \Leftarrow y_1=-\frac{3}{50}\cos(2x)-\frac{2}{25}\sin(2x)$$

הערה: מספיק למצוא את y_1.

פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית $y=c_1e^{x}+c_2e^{-4x}-\frac{3}{50}\cos(2x)-\frac{2}{25}\sin(2x)$.

<u>סעיף ה</u>

$$y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$$

המערכת השקולה היא:

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=-2y_2-y_1+3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

נמצא פתרון כללי עבור y_1.

תחילה נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית המתאימה $\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=-2y_2-y_1 \end{cases}$

נמצא את הערכים העצמיים עבור המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

נחשב את הפולינום האופייני: $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$.

ערך עצמי הוא: $\lambda = -1$.

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא מהצורה $\begin{matrix} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \\ y_2 = c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} \end{matrix}$.

נציב את הפתרון במערכת.

$-c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} = c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} \Rightarrow c_3 = c_2 - c_1, c_4 = -c_2$.

הפתרון הכללי הוא $\begin{matrix} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \\ y_2 = (c_2 - c_1) e^{-x} - c_2 x e^{-x} \end{matrix}$ $\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x e^{-x} \\ e^{-x} - x e^{-x} \end{pmatrix}$.

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -2y_2 - y_1 + 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$

$c'_1(x) \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + c'_2(x) \begin{pmatrix} x e^{-x} \\ e^{-x} - x e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{pmatrix}$.

נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} c'_1(x) e^{-x} + c'_2(x) x e^{-x} = 0 \\ -c'_1(x) e^{-x} + c'_2(x)\left(e^{-x} - x e^{-x}\right) = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$.

$\begin{cases} c'_1(x) + c'_2(x) x = 0 \\ -c'_1(x) + c'_2(x)(1-x) = 3\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow c'_2(x) = 3\sqrt{x+1} \Rightarrow c_2(x) = 2(x+1)^{\frac{3}{2}}$.

נציב $c'_2(x) = 3\sqrt{x+1}$ במשוואה הראשונה ונקבל

$c'_1(x) = -3x\sqrt{x+1} \Rightarrow c_1(x) = -2x(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

נשים לב שיש לחשב את y_1 בלבד.

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית

$y_1 = -2xe^{-x}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4e^{-x}}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2xe^{-x}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y_1 = \frac{4e^{-x}}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}$

פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית:

$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{4e^{-x}}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

שאלה 5

בסעיפים הבאים חשב את e^A כאשר:

א. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

ב. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

פתרון שאלה 5

סעיף א

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1\\ 4 & \lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-8)+4=\lambda^2-12\lambda+36=(\lambda-6)^2$$

ישנו ערך עצמי אחד $\lambda=6$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי.

ז"א מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ נקבל את שהבסיס של מרחב האפס הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

מימד המרחב העצמי הוא אחד, ולכן המטריצה לא לכסינה.

נמצא את מטריצת זורדן.

$A-6I=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ מכיוון ש $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ נקבל ש $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\in N(A-6I)\cap C(A-6I)$.

מכיוון ש $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ נקבל ש $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ואז $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. $J=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}$.

נשים לב ש: $\begin{pmatrix}4 & 1\\ -4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ ז"א $A=PJP^{-1}$ מכאן ניתן להסיק שלכל n טבעי מתקיים $A^n=PJ^nP^{-1}$.

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}PJ^nP^{-1}=P\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}J^n\right]P^{-1}=Pe^JP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^6 & e^6\\ 0 & e^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^6 & e^6\\ -2e^6 & e^6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^6 & e^6\\ -4e^6 & 3e^6\end{pmatrix}$$

<u>סעיף ב</u>

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -9 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda$ הערכים עצמיים הם $\lambda=0,\lambda=6$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=0$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -9 & -3\end{pmatrix}$ נניח $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=6$.

יש למצוא וקטור ששייך למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -9 & 3\end{pmatrix}$ נניח $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

המטריצה לכסינה ומתקיים $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

$$e^A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{e^6}{6} & \frac{e^6}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{e^6}{6} & -\frac{1}{6}+\frac{e^6}{6}\\ -\frac{3}{2}+\frac{e^6}{2} & \frac{1}{2}+\frac{e^6}{2}\end{pmatrix}.$$