רשימת משפטים למבחן

בדף הזה נניח ש V,W הם מרחבים וקטורים מעל שדה F, עם ממדים $\dim V = n$, $\dim W = m$. בנוסף נניח ש $T:V\to W$ היא העתקה ליניארית.

1. (משפט ההגדרה של העתקה ליניארית) יהי $\mathcal{B}_V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subset V$ **בסיס של** V. יהיו $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset W$ קבוצה <u>כלשהיא</u> של וקטורים ב W. קיימת העתקה ליניארית יחידה $T:V\to W$ כך $T(v_i)=x_i$ לכל $1\le i\le n$.

2. (משפט הממדים) תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. מתקיים ש $\dim V=\dim \operatorname{Ker} T+\dim \operatorname{Im} T$.

3. (משפט המטריצות של העתקה ליניארית) בסימון לעיל. לכל $v\in V$ מתקיים ש $[T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}[v]_{\mathcal{B}_V}=[T(v)]_{\mathcal{B}_W}$.

4. תהיי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ערכים עצמיים <u>שונים</u> של A ו $v_1,v_2,\ldots,v_k$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים העצמיים, בהתאמה אזי $v_1,v_2,\ldots,v_k$ הם בת"ל.

5. משפט הליכסון: $A\in F^{n\times n}$ לכסינה אמ"ם קיים בסיס ל F^n המורכב מווקטורים עצמיים שלA.

6. לכל ע"ע λ של $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים ש $1\le m_\lambda\le k_\lambda\le n$, כאשר k_λ מסמן את הריבוי האלגברי, ו m_λ מסמן את הריבוי הגיאומטרי.

בחומר מטה כל מרחב וקטור הוא מרחב מכפלה פנימי $(V,\langle\,,\rangle)$ מעל השדה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. יש לדעת את ההוכחות מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$.

7. (אי שוויון קושי שוורץ) לכל $v,w\in V$ מתקיים ש $|\langle v,w\rangle|\le\|v\|\|w\|$.

8. (אי שוויון המשולש). לכל $v,w\in V$ מתקיים ש $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$.

9. (משפט ההצגה של ריס) תהי $T:V\to\mathbb{C}$ העתקה ליניארית. קיימת $w\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים ש $T(v)=\langle v,w\rangle$.

10. בשימוש המשפט הקודם. (משפט ההגדרה של $T^*:V\to V$): לכל $T:V\to V$ קיימת העתקה ליניארית יחידה $T^*:V\to V$ כך שלכל $v,w\in V$ מתקיים ש $\langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle$.

11. (המטריצה של ההעתקה הצמודה). נניח ש $\mathcal{B}_V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subset V$ הוא בסיס אורתונורמלי. מתקיים ש $[T^*]_{\mathcal{B}_V}=\overline{[T]_{\mathcal{B}_V}^t}$.