נכתב על ידי נועם יערי

1. יהי $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ פולינום ממשי. אזי, לכל $k = 0, \cdots n$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

2. תהי $f(x)$ גזירה n פעמים בנקודה x_0. אזי, קיימת הצגה יחידה $f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + a_n \cdot (x - x_0)^n + r(x)$, כך ש: $\frac{r(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{x \to x_0} 0$. יותר על כן, לכל $k = 0,1, \cdots, n$: $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

3. תהי f גזירה n פעמים בקטע הסגור $\left[x_0, x_0 + \overset{>0}{\widehat{H}}\right]$, והנגזרות רציפות שם. עוד נניח כי הנגזרת $f^{(n+1)}$ קיימת בקטע הפתוח $(x_0, x_0 + H)$. אזי: לכל $x \in (x_0, x_0 + H)$, קיים $x_0 < c < x$ כך ש(בדומה עבור סביבה שמאלית של x_0):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}\left(\overset{c(x)}{\widehat{c}}\right)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}^{r(x)}$$

4. $e \notin \mathbb{Q}$

5. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. f עולה בקטע $\Leftrightarrow$ $0 \le f'(x)$.

6. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. f קבועה בקטע $\Leftrightarrow$ $0 = f'(x)$.

7. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. f יורדת בקטע $\Leftrightarrow$ $0 \ge f'(x)$.

8. תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי אם $0 \le f'(x)$ בסביבה ימנית של c ו $-$ $0 \ge f'(x)$ בסביבה שמאלית של c, אזי c נקודת מינימום.

9. תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי אם $0 \ge f'(x)$ בסביבה ימנית של c ו $-$ $0 \le f'(x)$ בסביבה שמאלית של c, אזי c נקודת מקסימום.

10. תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי אם הסימן של $f'(x)$ קבוע ושונה מאפס בסביבה של c, אזי c נקודת קיצון.

11. תהי f גזירה n פעמים, ומקיימת $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.

אם n זוגי: a נקודת מקסימום או מינימום אם $f^{(n)}(a) >< 0$ בהתאמה.

אם n אי זוגי: a אינה נקודת קיצון.

12. אם $f''(a)$ קיימת, אזי אם $f''(a) <> 0$, אזי f קמורה או קעורה ב - a בהתאמה.

13. אם $f''(a)$ ו $-$ a נקודת פיתול, אזי $f''(a) = 0$.

נכתב על ידי נועם יערי

.14 לינאריות האינטגרל:

$$\int(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)dx=\alpha\cdot\int fdx+\beta\cdot\int gdx$$

.15 שיטות אינטגרציה - בהרצאה 4 וב – Math wiki.

.16 אם $p(x),q(x)$ פולינומים זרים, אזי יש פולינומים $s(x),t(x)$ כך ש -

$1=s(x)p(x)+t(x)q(x)$ (ראינו בלינארית 2).

נובע מכך שאפשר לקבל כל פולינום $r(x)$ באגף שמאל במקום 1

(נכפול את שני האגפים ב – $r(x)$)

.17 אם $q(x)=g_1(x)\cdots g_n(x)$ מכפלת פולינומים זרים אז אפשר להציג $\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\cdots+\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$. לכן, מספיק לדעת לחשב אינטגרלים מהסוג $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$ כאשר $q(x)$ חזקה של פולינום אי פריק. (כל פולינום $q(x)$ מתפרק למכפלה של פולינומים אי פריקים וזו = מכפלה של חזקות של פולינומים אי פריקים זרים)

.18 כל פולינום ממשי הוא מכפלה של פולינומים ממשיים ממעלה לכל היותר 2.

(תזכורת: כיוון שהפולינום ממשי, אם $z\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$ שורש, גם $\bar{z}$ שורש.

$$(p(\bar{z})\overset{p(x)\in\mathbb{R}[x]}{\widehat{=}}\overline{p(z)}=\bar{0}=0$$

$$\Rightarrow p(x)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)(x-z_1)(x-\overline{z_1})\cdots(x-z_m)(x-\overline{z_m})$$

$\alpha_i\in\mathbb{R},z_i\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$ עבור האינדקסים הרלוונטיים.

.19 כל פולינום ממשי אי פריק הוא ממעלה 1 או 2

.20 תמיד אפשר להציג:

$$\frac{p(x)}{\left(q(x)\right)^m}=p_0(x)+\frac{p_1(x)}{q(x)}+\cdots+\frac{p_m(x)}{q(x)^m}$$

כאשר $\deg p_i<\deg g$ לכל i.

.21 אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז f חסומה בקטע. (ההפך איננו נכון – לדוגמה פונקציית דיריכלה חסומה אך אינה אינטגרבילית).

.22 תהי P חלוקה של $[a,b]$. אזי:

$$\underline{s}(P)=\inf\{\sigma(\tilde{P})\},\bar{s}(P)=\sup\{\sigma(\tilde{P})\}$$

כאשר $\tilde{P}$ חלוקה מנוקדת המתקבלת מבחירת נקודות בקטעי החלוקה P.

.23 $\underline{s}(P)\le\sigma(\tilde{P})$.

.24 אם $\tilde{P}$ עידון של P, אז: $\underline{s}(P)\le\underline{s}(\tilde{P}),\bar{s}(P)\ge\bar{s}(\tilde{P})$. לכן, החסמים הופכים הדוקים יותר ככל שמעדנים את החלוקה.

25. אם חלוקה $\tilde{P}$ של $[a,b]$ מתקבלת מחלוקה P של $[a,b]$ ע"י הוספת m נקודות, אז:

$$\bar{s}(P) \le \bar{s}(\tilde{P}) + m\cdot\lambda(P)\cdot\omega\,,\quad \underline{s}(P) \ge \underline{s}(\tilde{P}) - m\cdot\lambda(P)\cdot\omega$$

כאשר: $\omega \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$

26. לכל שתי חלוקות $P,\tilde{P}$ של $[a,b]$, מתקיים: $\underline{s}(P) \le \bar{s}(\tilde{P})$.

27. $(b-a)\cdot\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \underline{\int_a^b f(x)} \le \overline{\int_a^b f(x)dx} \le (b-a)\cdot\sup_{x\in[a,b]} f(x)$

28. <u>משפט דרבו:</u>

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \underline{s}(P)$$

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \bar{s}(P)$$

לכן, למשל, ניתן לחשב את האינטגרל העליון ע"י בחירת סדרת חלוקות P_n כך ש - $\lambda(P_n)\to 0$ כרצוננו, ולחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \bar{s}(P)$.

29. פונקציה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לפי רימן $\Leftrightarrow$ האינטגרל העליון של דרבו והאינטגרל התחתון של דרבו קיימים ושווים. במקרה זה:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

30. $\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

31. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f חסומה שם ולכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$ כך ש:

א. לכל שתי חלוקות P,Q עם $\lambda(P),\lambda(Q) < \delta$: $\bar{s}(P) - \underline{s}(Q) < \varepsilon$

ב. לכל חלוקה P עם $\lambda(P) < \delta$: $\bar{s}(P) - \underline{s}(P) < \varepsilon$

32. אם f בקטע $[a,b]$, ולכל $0 < \varepsilon$, קיימת:

א. חלוקה P כך ש: $\bar{s}(P) - \underline{s}(P) < \varepsilon$

ב. חלוקות P,Q כך ש: $\bar{s}(P) - \underline{s}(Q) < \varepsilon$

אז f אינטגרבילית שם.

33. <u>תנאי רימן לאינטגרביליות:</u>

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f חסומה בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\left(\overbrace{\Delta_1\cdot\omega_1+\cdots+\Delta_k\cdot\omega_k}^{=\bar{s}(P)-\underline{s}(P)}\right)=0$$

כאשר, לכל $1\le i\le k$: $\omega_i\coloneqq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

ובגבול, מספיק לקחת סדרה P_n <u>אחת</u> עם $\lambda(P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

34. <u>קריטריון רימן לאינטגרביליות:</u> התכונות הבאות שקולות:

1. f אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$.
2. f חסומה בקטע $[a,b]$ ו - $\lim_{\lambda(P)\to 0}\bar{s}(P)-\underline{s}(P)=0$.
3. f חסומה בקטע $[a,b]$ וקיימת סדרת חלוקות P_n עם $\lambda(P_n)\to 0$ כך ש:
$\lim_{n\to\infty}\bar{s}(P)-\underline{s}(P)=0$.

35. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

36. תהי f פונקציה מונוטונית בקטע $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית שם.

37. תהי $f(x)\ge 0$ בקטע $[a,b]$. אם $\int_a^b f(x)dx=0$ אז $f(x)=0$ כמעט בכל הקטע.

38. עבור פונקציות אינטגרביליות f,g בקטע $[a,b]$:

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)d(x)$$

39. יהיו $f\le g$ פונקציות אינטגרביליות ב - $[a,b]$. אם $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

אז $f(x)=g(x)$ כמעט בכל בקטע.

40. <u>משפט לבג (חלק ראשון):</u> אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז f רציפה כמעט בכל הקטע (כלומר: אוסף נקודות אי הרציפות של f קבוצה אפסית).

41. <u>משפט לבג (חלק שני):</u> תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ורציפה כמעט בכל הקטע. אזי, f אינטגרבילית בקטע.

42. כל פונקציה חסומה בקטע סגור עם מספר סופי או בן מניה של נקודות אי רציפות, היא אינטגרבילית בקטע.

43. אם $f(x)=0$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$ ואינטגרבילית שם, אזי $\int_a^b f(x)dx=0$.

אם $f(x)=g(x)$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$ ואינטגרביליות שם, אזי

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$

נכתב על ידי נועם יערי

44. תהי g פונקציה רציפה (או אפילו אינטגרבילית) בקטע $[a,b]$.

45. אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז:

1. הפונקציה $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע.
2. אם קיים $c>0$ כך ש: $|g(x)|\geq c$ לכל $x\in[a,b]$, אז: $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית בקטע.

46. אם f אינטגבילית בקטע $[a,b]$, אז לכל תת קטע $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, f אינטגרבילית בקטע $[\alpha,\beta]$.

47. יהיו $a<c<b$, f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

48. לכל a,b,c (לאו דווקא מסודרים $a<b<c$), ולכל פונקציה f אינטגרבילית בכל הקטעים הרלוונטים:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

49. אם $f\leq g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז:

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

50. תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אזי: הפונקציה $|f(x)|$ אינטגרבילית שם, ומתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$$

51. <u>משפט הערך הממוצע האינטגרלי:</u> יהיו f רציפה בקטע $[a,b]$, g אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו – $g(x)\geq 0$ בקטע. אזי, קיימת נקודה $c\in[a,b]$ עבורה:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

52. תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. תהי $F(x)\coloneqq\int_a^x f(t)dt$ אזי הפונקציה F רציפה בקטע $[a,b]$.

53. <u>המשפט היסודי של חדו״א:</u> תהי f אינטג׳ ב - $[a,b]$. תהי $F(x)\coloneqq\int_a^x f(t)dt$ מוגדרת בקטע. אזי לכל נקודת רציפות x של f מתקיים $F'(x)=f(x)$.

54. <u>הנוסחה היסודית (לייבניץ ניוטון):</u> תהי f רציפה בקטע $[a,b]$. תהי F פונקציה קדומה של f ב - $[a,b]$. (למשל, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$) אזי $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

55. <u>הכללה של הנוסחה :</u> תהי f אינטג׳ ב - $[a,b]$. תהי F פונקציה רציפה בקטע, ופרט למספר סופי של נקודות, F גזירה ומקיימת $F'(x)=f(x)$ אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

□