תרגיל 8

1. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\kappa)$ מרחבים טופולוגיים ותהי $f:X\to Y\times Z$. הוכיחו ש־f רציפה אם ורק אם $p_Y\circ f$ ו־$p_Z\circ f$ רציפות כאשר p_Y ו־p_Z הן ההטלות על Y ו־Z בהתאמה.
<u>פתרון:</u>

ראשית ברור שאם f רציפה אז גם $p_Y\circ f$ ו־$p_Z\circ f$ רציפות כהרכבה של פונקציות רציפות. מנגד, נניח ש־$p_Y\circ f$ ו־$p_Z\circ f$ רציפות, $x_0\in X$ ו־$f(x_0)\in U\in\tau_\Pi$. צריך למצוא $x_0\in V\in\tau$ כך ש־$f(V)\subseteq U$. נסמן $f(x_0)=(y,z)$. לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה, קיימות סביבות $y\in U_Y\in\sigma, z\in U_z\in\kappa$ כך ש־$(y,z)\in U_Y\times U_Z\subseteq U$. מכיוון ש־$p_Y\circ f$ ו־$p_Z\circ f$ רציפות, קיימות $x_0\in V_Y,V_Z\in\tau$ כך ש־

$$(p_Y\circ f)(V_Y)\subseteq U_Y\ \ (p_Z\circ f)(V_Z)\subseteq U_Z$$

נגדיר $V:=V_Y\cap V_Z$. קל לראות ש־

$$f(V)\subseteq U_Y\times U_Z\subseteq U$$

כרצוי.

2. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\kappa)$ מרחבים טופולוגיים ותהי $f:X\times Y\to Z$. לכל $x_0\in X$ ו־$y_0\in Y$ נגדיר $f_X^{(y_0)}:X\to Z$ ו־$f_Y^{(x_0)}:Y\to Z$ לפי

$$f_X^{(y_0)}(x):=f(x,y_0),\ \ f_Y^{(x_0)}(y):=f(x_0,y)$$

הוכיחו או הפריכו: f רציפה אם ורק אם $f_Y^{(x_0)}$ ו־$f_X^{(y_0)}$ רציפות לכל $x_0\in X$ ו־$y_0\in Y$.
<u>פתרון:</u>

זו הפרכה, אמנם נכון שאם f רציפה אז $f_Y^{(x_0)}$ ו־$f_X^{(y_0)}$ רציפות לכל $x_0\in X$ ו־$y_0\in Y$ (קל לראות זאת אחרי שמוכיחים שהשיכונים $X\to X\times\{y_0\}$ ו־$Y\to\{x_0\}\times Y$ הם רציפים). מנגד, ההפך לא תמיד נכון. נסתכל על $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$f(x,y):=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

זה תרגיל מאינפי 3 לראות שהפונקציה הזו רציפה על כל ישר ב־$\mathbb{R}^2$ אבל לא רציפה ב־$(0,0)$.

3. הוכיחו שאם (X,τ) מרחב טופולוגי אז האלכסון $\Delta:=\{(x,x)\in X^2\mid x\in X\}$ הוא קבוצה סגורה $\iff$ X הוא T_2
<u>פתרון:</u>

ראשית נניח שהאלכסון הוא קבוצה סגורה. יהיו $x \neq y \in X$. צריך למצוא $U, V \in \tau$ כך ש־$x \in U$, $y \in V$ וגם $U \cap V = \emptyset$. נשים לב ש־$X^2 \setminus \nabla$ היא קבוצה פתוחה וגם $(x, y) \in X^2 \setminus \nabla$. לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה, קיימות $U, V \in \tau$ כך ש־$(x, y) \in U \times V \subseteq X^2 \setminus \nabla$. לפי הגדרה $x \in U, y \in V$. בנוסף, אם $z \in U \cap V$ אז $(z, z) \in (U \times V) \cap \nabla$ מה שלא הגיוני ולכן $U \cap V = \emptyset$, כדרוש.

מנגד, נניח ש־X הוא T_2 ותהי $(x, y) \in X^2 \setminus \nabla$. לפי הגדרה, קיימים $U, V \in \tau$ כך ש־$x \in U, y \in V$ ו־$U \cap V = \emptyset$. כמו קודם, מכאן נובע ש־$(x, y) \in U \times V \subseteq X^2 \setminus \nabla$. לפי הגדרה $X^2 \setminus \nabla$ פתוחה ולכן ∇ סגורה.

4. הוכיחו שלכל פונקציה רציפה $f : X \to Y$ מתקיים ש־$Gr(f) \simeq X$ כאשר

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

פתרון:

ראשית, נסתכל על הפונקציה $F : X \to Gr(f)$ שמוגדרת ע"י $F(x) := (x, f(x))$. נסתכל גם על ההטלה $p_X : Gr(f) \to X$ שמוגדרת ע"י $p_X(x, f(x)) := x$. קל לראות ש־$F^{-1} = p_X$ ולכן הפונקציות האלה הפיכות. בנוסף, ראינו בתרגיל 1 ש־p_X תמיד רציפה. נשאר להראות ש־F רציפה ולכן הומיאומורפיזם. זו מסקנה ישירה של תרגיל 1 שאומר שפונקציה לתוך מכפלה היא רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל רכיב, מה שבברור נכון כאן.

5. אם $Y \in T_2$ וגם $f : X \to Y$ רציפה אז $Gr(f)$ סגורה ב־$X \times Y$.

פתרון:

נראה ש־$(X \times Y) \setminus Gr(f)$ פתוחה. יהיו $(x, y) \in (X \times Y) \setminus Gr(f)$, צריך למצוא $O \in \tau_\Pi$ $(x, y) \in O$ כך ש־$O \subseteq (X \times Y) \setminus Gr(f)$. לפי הגדרה, $f(x) \neq y$. מכיוון ש־Y הוא T_2 קיימים $U, V \in \sigma$ כך ש־$y \in U, f(x) \in V$ וגם $U \cap V = \emptyset$. מכיוון ש־f רציפה קיימת $x \in V' \in \tau$ כך ש־$f(V') \subseteq V$. נגדיר $O := V' \times U$. אכן, אם $(x', f(x')) \in O$ אז לפי הגדרה $x' \in V'$ ולכן $f(x') \in V$. מנגד, לפי הגדרה $f(x') \in U$ אבל זו סתירה כי U ו־V זרות. מכאן ש־$O \cap Gr(f) = \emptyset$, או במילים אחרות $O \subseteq (X \times Y) \setminus Gr(f)$.

6. יהיו $(X, \tau), (Y, \sigma)$ מרחבים טופולוגיים. בכל אחד מהסעיפים הבאים יש תכונה של מרחבים טופולוגיים. עבור כל אחד מהם, הוכיחו או הפריכו שאם X ו־Y מקיימים את התכונה הזו אז גם $X \times Y$ מקיימת אותה:

(א) דיסקרטיות

(ב) קשירות

(ג) קשירות מסילתית

(ד) ספרביליות

(ה) B_2

(ו) B_1

(ז) מימד אפס

(ח) מטריזביליות

<u>פתרון:</u>

.1

(א) נניח ש־X,Y דיסקרטים. במקרה כזה, לכל $x \in X$ ו־$y \in Y$ מתקיים ש־$\{x\} \in \tau, \{y\} \in \sigma$. לכן, $\{(x,y)\} = \{x\} \times \{y\} \in \tau_\Pi$. כלומר, כל הנקודונים פתוחים ולכן טופולוגיית המכפלה דיסקרטית גם היא.

(ב) נניח ש־X,Y קשירים. קל לראות לפי תרגיל 4 שלכל $x_0 \in X$ ו־$y_0 \in Y$ מתקיים ש־$X \simeq X \times \{y_0\}$ ו־$Y \simeq \{x_0\} \times Y$ (נסו לחשוב מה הפונקציה הרציפה שהגרף שלה רלוונטי לטענה הזו). מכאן ש־$X \times \{y_0\}$ ו־$\{x_0\} \simeq Y$ קשירים לכל בחירה של $x_0 \in X$ ו־$y_0 \in Y$. אם אחת הקבוצות הייתה ריקה אז כך הייתה גם המכפלה מה שהיה עושה אותה קשירה. לכן, נניח ששתיהן לא ריקות. נבחר $y_0 \in Y$. נשים לב שלכל $x \in X$ מתקיים ש־

$$(\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y_0\}) = \{(x, y_0)\} \neq \emptyset$$

לפי משפט האלומות, $Z_x := (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ קשירה. בנוסף, נשים לב שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים ש־

$$Z_{x_1} \cap Z_{x_2} \supseteq X \times \{y_0\} \neq \emptyset$$

לכן, לפי משפט האלומות גם $\bigcup_{x \in X} Z_x$ קשיר. עם זאת, קל לראות ש־

$$X \times Y \supseteq \bigcup_{x \in X} Z_x \supseteq \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times Y) = X \times Y$$

מכאן מסיקים ש־$X \times Y$ אכן קשיר.

(ג) נניח ש־X,Y קשירים מסילתית, ויהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$. כמו שראינו בסעיף הקודם, $X \simeq X \times \{y_1\}, Y \simeq \{x_2\} \times Y$ ולכן גם המרחבים הללו קשירים מסילתית. לפי הגדרה, קיימת מסלילות $\gamma_X : [0,1] \to X \times \{y_1\}$ ו־$\gamma_Y : [0,1] \to \{x_2\} \times Y$ כך ש־

$$\gamma_X(0) = (x_1,y_1), \gamma_X(1) = (x_2,y_1), \gamma_Y(0) = (x_2,y_1), \gamma_Y(1) = (x_2,y_2)$$

נסתכל על המסילה $\gamma : [0,1] \to X \times Y$ שמוגדרת לפי

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_X(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_Y(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

קל לוודא שהיא רציפה בכל אחד מתחומי ההגדרה שלה ושהיא קוהרנטית בנקודת החיתוך $t = \frac{1}{2}$ ולכן רציפה לפי תרגיל שראינו בתרגול. בנוסף $\gamma(0) = (x_1,y_1)$ וגם $\gamma(1) = (x_2,y_2)$ כרצוי.

(ד) נניח ש־X,Y ספרביליות ויהיו $A \subseteq X$ ו־$B \subseteq Y$ קבוצות צפופות בנות מניה. נגדיר $C := A \times B \subseteq X \times Y$. ברור ש־$C$ בת מניה, נראה שהיא צפופה. תהי $(x,y) \in X \times Y$ צריך להראות שלכל $(x,y) \in O \subseteq X \times Y$ מתקיים ש־$C \cap O \neq \emptyset$. אכן, לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה קיימים $x \in U \in \tau, y \in V \in \sigma$ כך ש־$(x,y) \in U \times V \subseteq O$. מכיוון ש־$A,B$ צפופות, קיימים $x' \in A \cap U$ ו־$y' \in B \cap V$. מכאן ש־

$$(x',y') \in U \times V \subseteq O \Rightarrow C \cap O \neq \emptyset$$

כרצוי.

(ה) נניח ש־X,Y הם B_2. יהיו γ_X,γ_Y בסיסים בני מניה ל־X ול־Y בהתאמה. אנחנו נגדיר

$$\gamma := \{O_X \times O_Y \mid O_X \in \gamma_X, O_Y \in \gamma_Y\}$$

קל לראות ש־γ בת מניה. נראה ש־γ בסיס ל־$X \times Y$. יהיו $(x,y) \in X \times Y$ וגם $(x,y) \in O \in \tau_\Pi$. לפי הגדרה, קיימות $x \in U \in \tau, y \in V \in \sigma$ כך ש־$(x,y) \in U \times V \subseteq O$. מכיוון ש־$\gamma_X$ ו־γ_Y הם בסיסים, קיימים $U' \in \gamma_X$ ו־$V' \in \gamma_Y$ כך ש־$x \in U' \subseteq U, y \in V' \subseteq V$. מכאן ש

$$(x,y) \in U' \times V' \subseteq U \times V \subseteq O$$

אבל $U' \times V' \in \gamma$, כרצוי.

(ו) ממש דומה לסעיף הקודם

(ז) נניח ש־X,Y הם ממימד 0. יהי $(x,y) \in X \times Y$, נראה שכל סביבה פתוחה של (x,y) מכילה סביבה סגוחה. תהי $(x,y) \in O \in \tau_\Pi$. לפי הגדרה, קיימות $x \in U \in \tau$ ו־$y \in V \in \sigma$ כך ש־$(x,y) \in U \times V \subseteq O$. מכיוון ש־$X$ ו־Y הם ממימד 0, קיימות תת קבוצות סגוחות $x \in U' \subseteq U, y \in V' \subseteq V$. ברור ש־

$$(x,y) \in U' \times V' \subseteq U \times V \subseteq O$$

בנוסף, אנחנו טוענים ש־$U' \times V'$ היא סגוחה. ברור שהיא פתוחה ובנוסף:

$$(U' \times V')^c = \Big((U')^c \times Y\Big) \cup \Big(X \times (V')^c\Big)$$

גם היא בבירור פתוחה. לפי הגדרה, $U' \times V'$ סגוחה, כרצוי.

(ח) נניח ש־X,Y הן מטריזביליות. תהי d_X מטריקה על X ו־d_Y מטריקה על Y שמשרות את הטופולוגיות. נגדיר מטריקה

$$d\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) := \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}$$

נשאיר את זה כתרגיל להראות שזו אכן מטריקה, ושהיא משרה את טופולוגיית המכפלה.

7 הוכיחו או הפריכו: מכפלה של טופולוגיות קו־סופיות היא קו־סופית
פתרון:

הפרכה. נסתכל על $X := (\mathbb{N}, \tau_{cof})$ ועל X^2. קל לראות ש־$\mathbb{N} \setminus \{42\} \subseteq X$ פתוחה ולכן גם $A := (\mathbb{N} \setminus \{42\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{42\}) \subseteq X^2$ פתוחה בטופולוגיית המכפלה. עם זאת:

$$X^2 \setminus A = \Big((\mathbb{N} \setminus \{42\}) \times \mathbb{N}\Big) \cup \Big(\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{42\})\Big)$$

וזו קבוצה אינסופית, ולכן A אינה פתוחה בטופולוגיה הקו־סופית.

8 נסתכל על המספרים ה־p־אדים $(\mathbb{Z}, d_p)$. הראו ש־$\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
פתרון:

לכל $x \in \mathbb{Z}$ קיים יצוג יחיד כ־$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n p^n$ כאשר $x_n \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ (שימו לב שמספרים שליליים מקבלים ייצוג אינסופי). נגדיר $\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ע"י

$$\varphi(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n p^{2n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n p^{2n+1}$$

קל לראות שהעתקה זו היא חח"ע ועל. נראה שהיא רציפה וגם שההופכית שלה רציפה. יהיו $x,y \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ויהי $\varepsilon > 0$. לפי תכונת הרציפות לפי בסיס שראינו בהרצאה (וגם בתרגול שעבר), מספיק להראות שקיים $\delta > 0$ כך ש־

$$B(x,\delta)\times B(y,\delta) \subseteq B(\varphi(x,y),\varepsilon)$$

אכן, נסתכל על $\delta := \frac{1}{2}\varepsilon$ (אפשר לבחור δ צמוד יותר אבל אין צורך). נניח ש־ $(x',y') \in B(x,\delta)\times B(y,\delta)$ ויהי $n_0 \in \mathbb{N}$ מקסימלי כך ש־$p^{-n_0} \geq \varepsilon$. אפשר גם להניח ש־$n_0 > 0$ כי אחרת $B(\varphi(x,y),\varepsilon) = \mathbb{Z}$ והטענה ברורה. אז ידוע ש־$x_n = x'_n$ ו־$y_n = y'_n$ לכל $n \leq n_0$. קל לראות מכאן ש־

$$\varphi(x,y)_n = \varphi(x',y')_n$$

לכל $n \leq 2n_0$. לכן,

$$d(\varphi(x,y),\varphi(x',y')) < p^{-2n_0} \leq p^{-n_0-1} < \varepsilon$$

מנגד, נראה ש־f^{-1} רציפה. נניח $x,y \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ויהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך שאם $z \in B(\varphi(x,y),\varepsilon)$ אז $\varphi^{-1}(z) \in B(x,\delta)\times B(y,\delta)$. נגדיר $\delta := \varepsilon^2$. יהי $n_0 \in \mathbb{N}$ מקסימלי כך ש־$p^{-n_0} \geq \varepsilon$. מכאן ש־$p^{-2n_0} \geq \varepsilon^2 = \delta$ ולכן אם $z \in B(\varphi(x,y),\varepsilon)$ אז לכל $n \leq 2n_0$ מתקיים ש־$z_n = \varphi(x,y)_n$. בפרט מתקיים שלכל $n \leq n_0$

$$x_n = \varphi(x,y)_{2n} = z_{2n},\ \ y_n = \varphi(x,y)_{2n+1} = z_{2n+1}$$

ולכן $\varphi^{-1}(z) \in B(x,\delta)\times B(y,\delta)$ כרצוי.

9 הראו ש־$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S_1 \times \mathbb{R}$

<u>פתרון</u>

ידוע ש־$(0,\infty) \simeq \mathbb{R}$ אז מספיק להוכיח ש־$S_1 \times (0,\infty) \simeq \mathbb{R}^2$. נסתכל על S_1 כתת קבוצה של $\mathbb{R}^2$ ונגדיר $\varphi : S_1 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ על ידי

$$\varphi(\alpha,r) := r\alpha$$

קל לראות שהפונקציה הזו היא חח"ע ועל ולכן הפיכה. היא גם בבירור רציפה כי פונקציית הכפל בסקלר $P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ידוע להיות רציפה ו־φ היא פשוט הצמצום שלה על $S_1 \times (0,\infty)$. לבסוף, נראה שהפונקציה ההופכית רציפה גם היא. קל לראות ש־

$$\varphi^{-1}(x,y) = \Big(\frac{1}{\|(x,y)\|}(x,y), \|(x,y)\|\Big)$$

כאשר $\|\cdot\|$ היא הנורמה האוקלידית. לפי התרגיל הראשון היום מספיק להראות שהפונקציה רציפה בכל רכיב. ראינו שפונקציית הנורמה היא תמיד רציפה ולכן $(x,y) \mapsto \|(x,y)\|$ היא רציפה. בנוסף, פונקציית הופכי גם היא רציפה אם 0 לא בתחום ולכן ההרכבה $(x,y) \mapsto \frac{1}{\|(x,y)\|}$ רציפה על $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. לבסוף, כבר נזכרנו שפונקציית הכפל בסקלר רציפה ולכן אנחנו מקבלים ש־φ^{-1} רציפה גם היא, כרצוי.

10 נסתכל על המישור של סורגנפרי $X := (\mathbb{R}, \tau_s) \times (\mathbb{R}, \tau_s)$. הראו שהוא ספרבילי אבל שיש לו תת מרחב לא ספרבילי.

פתרון:

כבר ראינו בתרגול הקודם ש$(\mathbb{R}, \tau_s)$ ספרבילית, וראינו בתרגיל היום שמכפלה (סופית) של מרכבים ספרבילים נשארת ספרבילית. מכאן ש־X ספרבילי. מנגד, אנחנו נטען שהאנטי־אלכסון אינו ספרבילי

$$\nabla := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

נשים לב ש־$O := [x, x+1) \times [x, x+1)$ קבוצה פתוחה ב־X ולכן גם $\nabla \cap O$ קבוצה פתוחה ב־∇. עם זאת, קל לוודא ש־

$$\nabla \cap O = \{(x, -x)\}$$

זה נכון לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן ∇ דיסקרטית. בנוסף, היא אינה בת מניה כי היא מוגדרת לפי התאמה ל־$\mathbb{R}$. קבוצה דיסקרטית לא יכולה להיות ספרבילית אלא אם היא בת מניה ולכן סיימנו את הטענה.

11 נניח ש־$(X, <, \tau_<)$ ו־$(Y, \prec, \tau_\prec)$ מרחבים סדורים לינארית עם טופולוגיית הסדר. מה היחס בין טופולוגיית הסדר הלקסיקוגרפי τ_{lex} על $X \times Y$ לבין טופולוגיית המכפלה τ_Π?

פתרון:

כדי למנוע בלבול, בתרגיל הזה נסמן קטעים פתוחים בסדר הלקסיקוגרפי על ידי $\langle a, b\rangle$

אנחנו טוענים שהסדר הלקסיקוגרפי חזק מהסדר האוקלידי (לפעמים חזק ממש). תהי $(x, y) \in X \times Y$ ו־$O \in \tau_\Pi$,$(x, y) \in O$, צריך למצוא $(a, b), (c, d) \in X \times Y$ כך ש־$(a, b) < (x, y) < (c, d)$ וגם הקטע הפתוח $\Big\langle (a, b), (c, d) \Big\rangle$ מוכל ב־O. לפי הגדרה, קיימות $x \in U \in \tau_<, y \in V \in \tau_\prec$ כך ש־$(x, y) \in U \times V \subseteq O$. לפי הגדרת טופולוגיית הסדר, קיימים $\alpha_1, \alpha_2 \in X, \beta_1, \beta_2 \in Y$ כך ש־$\alpha_1 < x < \alpha_2$, $\beta_1 < y < \beta_2$ וגם $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle \subseteq U$ ו־$\langle \beta_1, \beta_2\rangle \subseteq V$. נגדיר

$$a := \alpha_1, b := \beta_1, c := \alpha_1, d := \beta_2$$

שימו לב שזו לא טעות, $c := \alpha_1$. קל לראות ש־

$$\langle (a, b), (c, d)\rangle \subseteq \alpha_1 \times \langle \beta_1, \beta_2\rangle \subseteq \{\alpha_1\} \times V \subseteq U \times V \subseteq O$$

כרצוי.

כדי לראות דוגמה למקרה בו טופולוגיית המכפלה חלשה ממש מהטופולוגיה הלקסיקוגרפית, אפשר להסתכל על תרגיל 7 בתרגול 4.

הערה: בהוכחה האחרונה היינו צריכים להתייחס גם למקרה שאחר מקצוות הקטעים המוזכרים הוא $\pm\infty$. זה לא היה משנה את הטיעון אז לא כתבנו את זה מפורשות.

12 נסתכל על הסדר הלקסיקוגרפי ב־$X := [0, 1] \times \{0, 1\}$. באופן ציורי, כל נקודה ב־$[0, 1]$ הופכת להיות זוג נקודות עם סדר.

(א) הוכיחו ש־(X, τ_{lex}) היא ספרבילית, B_1 ו־T_2.

(ב) הראו שהנקודות $(0, 0)$ ו־$(1, 1)$ מבודדות.

(ג) מצאו תת מרחב של (X, τ_{lex}) שהומיאומורפי לישר של סורגנפרי.

(ד) הסיקו ש־X אינו מטריזבילי ואינו B_2.

<u>הערה:</u> למרחב הזה קוראים לפעמים splitted interval או double arrow.

<u>פתרון:</u>

גם בתרגיל הזה נסמן קטעים פתוחים בסדר הלקסיקוגרפי על ידי $\langle a, b\rangle$. ראינו כבר בתרגיל 10 בתרגול 4 שכל קבוצה סדורה לינארית עם טופולוגיית הסדר היא T_2. קל לראות ש־$\mathbb{Q} \times \{0,1\}$ צפופה ב־X ולכן הוא ספרבילי. לכל $(x, 0) \in X$ נגדיר

$$\beta_x := \left\{\langle (x-q, 0), (x, 1)\rangle \mid q \in \mathbb{Q}^{>0}\right\}$$

ועבור $x = (x, 1)$ נגדיר

$$\beta_x := \left\{\langle (x, 0), (x+q, 1)\rangle \mid q \in \mathbb{Q}^{>0}\right\}$$

קל לראות שלכל $x \in X$ מתקיים ש־β_x בסיס מקומי. הוא גם בן מניה כמובן ולכן X הוא B_1.

כדי לראות ש־$(0,0)$ ו־$(1,1)$ מבודדות נראה שהמשלים שלהם פתוח:

$$X \setminus \{(0,0)\} = \Big\langle (0,0), \infty \Big\rangle,\ X \setminus \{(1,1)\} = \Big\langle -\infty, (1,1) \Big\rangle$$

עכשיו אנחנו טוענים ש־

$$X^+ := \{(x,1) \in X \mid x \in (0,1)\} \simeq ((0,1), \tau_s)$$

כאשר פונקציית ההומאומורפיזם היא פשוט פונקציית ההטלה. ראינו בתרגיל הקודם שטופולוגיית הסדר הלקסיקוגרפי חזקה מהטופולוגיית המכפלה. ראינו בתרגיל הראשון שפונקציות ההטלה הן רציפות מתוך טופולוגיית המכפלה ולכן גם ההטלה כאן תהיה רציפה. מנגד, נראה ש־$p_{(0,1)}^{-1} : ((0,1), \tau_s) \to X^+$ ששולחת $x \to (x, 1)$ גם היא רציפה. לפי תרגיל קיצורי דרך עם בסיסים מהתרגול הקודם, מספיק להראות שהתמונה ההפוכה של קטע ב־X^+ היא פתוחה ב־$([0,1], \tau_s)$. נניח ש־$(x, a) < (y, b)$ ונסתכל על $U := X^+ \cap \langle (x,a), (y,b)\rangle$. קל לוודא ש־$U$ שווה לערכים הבאים בהתאם לערך של a ו־b:

	$a=1$	$a=0$	הערות
$b=1$	$p_{(0,1)}^{-1}((x,y))$	$p_{(0,1)}^{-1}([x,y))$	שימו לב שההגדרה של X^+ משחקת כאן תפקיד חשוב
$b=0$	$p_{(0,1)}^{-1}((x,y))$	$p_{(0,1)}^{-1}([x,y))$	

בכל מקרה, מצאנו קבוצה פתוחה בטופולוגיה של סורגנפרי ש־$p_{(0,1)}^{-1}$ מעתיקה לתוך U. לפי הגדרה, $p_{(0,1)}$ אכן הומיאומורפיזם.

כעת נראה ש־$((0,1), \tau_s) \simeq (\mathbb{R}, \tau_s)$. אכן, נגדיר $f : ((0,1), \tau_s) \to (\mathbb{R}, \tau_s)$ כמו במקרה של הטופולוגיה האוקלידית על ידי

$$f(x) := \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

הפונקציה הזו היא הומיאומורפיזם בטופולוגיה האוקלידית ולכן שולחת קטע פתוח לקטע פתוח (מטעמי קשירות והגדרת ההומיאומורפיזם). בנוסף, היא מונוטונית ורציפה אז

היא תשלח קטע חצי פתוח לקטע חצי פתוח מאותו סוג. מכאן שפונקציה זו רציפה בטופולוגיית סורגנפרי. אותו דבר נכון גם ל־f^{-1} ולכן f היא באמת הומיאומורפיזם.

ראינו כבר בתרגול הקודם ש־$([0,1],\tau_s)$ אינו B_2 ואינו מטריזבילי. מכיוון ששתי התכונות הללו תורשתיות, X אינו B_2 ואינו מטריזבילי.