פיתרון תרגיל 2

1. בהתקיים התנאי הנתון – קיום נגזרת שנייה אי שלילית בקטע , תהיינה שתי נקודות c , d בקטע ונניח כי c < d . אז הנקודה $\frac{c+d}{2}$ נמצאת בין שתי הנקודות הנ"ל . נזכיר כי משפט ערך הביניים של LAGRANGE "תופס " עבור פונקציה רציפה בקטע סגור וגזירה בקטע הפתוח .
נפעיל את משפט LAGRANGE בקטע $[c,\frac{c+d}{2}]$, ובקטע $[\frac{c+d}{2},d]$ ונקבל נקודות x_1 , x_2 כך ש :

$$\frac{f(\frac{c+d}{2})-f(c)}{[\frac{c+d}{2}-c]} = \frac{[f(\frac{c+d}{2})-f(c)]\cdot 2}{d-c} = f^{(1)}(x_1), with: c < x_1 < \frac{c+d}{2}$$

$$\frac{f(d)-f(\frac{c+d}{2})}{[d-\frac{c+d}{2}]} = \frac{[f(d)-f(\frac{c+d}{2})]\cdot 2}{d-c} = f^{(1)}(x_2)\ \ with: \frac{c+d}{2} < x_2 < d$$

בין היתר נקבל כי $x_1 < x_2$.

כעת , לפי הנתון ניתן להשתמש במשפט LAGRANGE עבור **__הנגזרת__** בקטע $[x_1, x_2]$ ולקבל :

$$\frac{f^{(1)}(x_2)-f^{(1)}(x_1)}{x_2-x_1} = f^{(2)}(t) \geq 0\ ,\ x_1 < t < x_2$$

לכן נקבל - $$\frac{[f(d)-f(\frac{c+d}{2})]\cdot 2}{d-c} = f^{(1)}(x_2) \geq f^{(1)}(x_1) = \frac{[f(\frac{c+d}{2})-f(c)]\cdot 2}{d-c}$$

ואחרי שנפשט זאת נקבל : $f(\frac{c+d}{2}) \leq \frac{f(c)+f(d)}{2}$.

2. נשים לב שהנגזרת מסדר K של הפונקציה xe^x היא : $f^{(k)}(x) = e^x(x+k)$ ולכן : $f^{(k)}(0) = k$

ולכן פיתוח מקלוריין של הפונקציה עם שארית בצורת לגרנז' יהיה :

$$xe^x = \frac{x}{1!} + \frac{2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n}{n!}x^n + \frac{e^{c_x}(n+1+c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

כאשר נקודת הביניים c_x בין x ל- 0 .

כעת , אם נידרש לחשב את $0.1e^{0.1}$ בדיוק העולה על 0.0001 נמצא עד איזה סדר יש לפתח למקלוריין את הפונקצייה כך שהשגיאה , בערכה המוחלט , תהיה קטנה מ 0.0001 :

נשים לב כי אם $0 < c < 0.1$ אז קיים : $1 < e^c < e^{0.1} < 4^{0.5} = 2$ ולכן נקבל :

$$|\mathrm{R}_n(0.1)| = \left|\frac{e^c(\mathrm{n}+1+\mathrm{c})}{(\mathrm{n}+1)!}0.1^{n+1}\right| \le \frac{2(n+1+1)}{(\mathrm{n}+1)!}0.1^{\mathrm{n}+1} \le \frac{2(n+2)}{(\mathrm{n}+1)!10^{\mathrm{n}+1}}$$

ועבור n=3 נקבל

$$\frac{2(n+2)}{(\mathrm{n}+1)!10^{\mathrm{n}+1}} = \frac{2(5)}{4!10^4} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^4}$$

ולכן קיבלנו שאם נפתח פיתוח מקלוריין לפולינום מדרגה 3 , נקבל :

$$\left|\left(\frac{0.1}{1!} + \frac{2}{2!}0.1^2 + \frac{3}{3!}0.1^3\right) - 0.1e^{0.1}\right| < \frac{1}{10^4}$$

3. נסתכל על הפונקציה $h(x) = f(x) - g(x)$. אז זו פונקציה שגזירה n פעמים לכל x .

אם כך , נפתח פיתוח טיילור שלה מסדר n-1 מסביב לנקודה x_0 עם שארית בצורת לגרנז" , ונשים לב כי קיים

$h^{(\mathrm{k})}(x_0) = f^{(\mathrm{k})}(x_0) - g^{(\mathrm{k})}(x_0) = 0, k = 0,1,2,\dots,n-1$ ובנוסף קיים : $h^{(n)}(x) > 0$ לכל x .

לכן עבור $x > x_0$ קיים :

$$f(x) - g(x) = h(x) = h(x_0) + \frac{h^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{h^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{h^{(n)}(c)(x-x_0)^n}{n!} > 0$$

כאשר c נקודה בין x ל - x_0 ועבור $(x - x_0)^n > 0$.

*שימו לב שפיתוח טיילור בנפרד ל g ו- f לא יעבוד , כי אז בכל פיתוח נקבל נקודת ביניים אחרת ...

b) א. נשתמש בסעיף א , עבור $f(x) = e^x, g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ כאשר הנקודה המדוברת היא $x_0 = 0$

ונקבל את התוצאה .

° שימו לב שקיבלנו חסם טוב יותר מאשר החסם $e^x > x+1$ שקיבלתם בעזרת משפט ערך הביניים של לגרנז" - כאן אנו מבצעים "חקירה " עדינה יותר בעזרת נגזרות מסדר גבוה יותר מ-1 .

ב. גם כאן נשתמש בסעיף א' בשני צידי אי השיוויון בפיתוח סביב הנקודה 0 .

4.א . $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$:

הפונקציות במונה ובמכנה גזירות מכל סדר , ולכן נבטא את המונה בעזרת פולינום טיילור ועוד שארית בצורה של "O קטן" , מסביב לנקודה 0 : $f(x)=\cos(x)-e^{\frac{-x^2}{2}}$, המונה שלנו מקיים שנגזרותיו מסדר 0 , 1 ,2 ו – 3 באפס מתאפסות , ונקבל לכן $f(x)=\cos(x)-e^{\frac{-x^2}{2}}=\frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}+o(x^4)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$

ולכן : $\frac{\cos(x)-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}=\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{\frac{-1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{1}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{-1}{12}$ (כלומר נפתח לפולינום ועוד איבר שארית עד שנגיע למצב במונה ובמכנה של איברים שהם קבועים ועוד איברים ששואפים לאפס כשניקח גבול ...) .

ב. $\lim_{x\to\infty}[x-x^2 ln\left(1+\frac{1}{x}\right)]$

נשים לב כי עבור חילוף משתנה $x=\frac{1}{y}$ קיים $y\to 0^+ \Leftrightarrow x\to\infty$ ולכן קיים :

$$\lim_{x\to\infty}[x-x^2 ln\left(1+\frac{1}{x}\right)]=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}-\frac{\ln(1+y)}{y^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

נשתמש בפיתוח מקלוריין של $\ln(1+x)$: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$

ולכן : $\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{\frac{x^2}{2!}+o(x^2)}{x^2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1}\xrightarrow[x\to 0^+]{}\frac{1}{2}$

ג. $\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x^2+x-2}$

נשים לב שבמונה יש פולינום בחזקות של x ואותנו מעניין הגבול ב-1 לכן נפתח פיתוח טיילור את המונה והמכנה , מסביב ל *x=1* . אנו יודעים להביע פולינום בחזקות של *x-c* כפולינום בחזקות של *x-d* ... ולכן :

$$\ln(x)=\ln(1)+1(x-1)+o(x-1)=x-1+o(x-1)\ ,\quad x^2+\mathrm{x}-2=3(\mathrm{x}-1)+(x-1)^2$$

ולכן : $\frac{\ln(x)}{x^2+\mathrm{x}-2}=\frac{(\mathrm{x}-1)+o(x-1)}{3(\mathrm{x}-1)+(\mathrm{x}-1)^2}=\frac{1+\frac{o(x-1)}{(x-1)}}{3+(\mathrm{x}-1)}\xrightarrow[\mathrm{x}\to 1]{}\frac{1}{3}$

5. יש להוכיח כי עבור $n>0$ מספר טבעי , מתקיים : $0<\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2n^2}$:

אנו מכירים כבר את פיתוח המקלוריין (עם שארית בצורת לגרנז') הבא :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+c)^2}\ ,\ \ 0<c<x$$

עבור $x=\frac{1}{n}$ נקבל : $\frac{1}{2n^2}>\frac{1}{2n^2(1+c)^2}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$, כנדרש !

$\Downarrow$

חיובי !