# פיתרון תרגיל 6 – אינפי 2

1. א. "פונקציה רציפה בקטע סופי , פרט למספר סופי של נקודות אי רציפות – האם אינטגרבילית בו ?" – ניזכר כי אינטגרביליות גוררת חסימות ! לכן אם נמצא פונקציה המוגדרת בקטע סגור , ורציפה פרט למספר סופי של נקודות , אך איננה חסומה – היא לא תהיה אינטגרבילית – ודוגמא כזו היא למשל : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & , \quad 0<x\le 1\\ 17 & , \quad 0\end{cases}$ .

ב. "פונקציה שיש לה קדומה בקטע – איטגרבילית בו ? " .

נזכיר לכם כי אם לפונקציה יש קדומה , כלומר היא נגזרת של פונקציה אחרת , אז אנו יודעים עליה כי יש לה את תכונת "ערך הביניים " , וכי נקודות אי הרציפות שלה הן מסוג שני בלבד . ראינו דוגמאות לפונקציות בעלות קדומות שאינן רציפות (!) .

אבטיפוס אחד לדוגמאות נגדיות - פונקציות מהצורה : $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right), & x\neq 0\\ c \quad , & x=0\end{cases}$

(זה לא אומר שאין דוגמאות אחרות ! ) .

נסתכל לדוגמא על : $f(x)=\begin{cases}x^{2}\sin\left(\frac{1}{x^{2}}\right), & x\neq 0\\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$ בקטע $[0,1]$ .

אז פונקציה זו גזירה בקטע , וקיים : $f^{(1)}(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x^{2}}\right)-\frac{2}{x}\cdot cos\frac{1}{x^{2}}, & x\neq 0\\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$

לכן לפונקציית הנגזרת יש קדומה בקטע $[0,1]$ אך היא איננה אינטגרבילית , מכיוון שאיננה חסומה בו ! (בידקו-למשל בעזרת סידרה : $x_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ ) .

ג. A קבוצת ממשיים בקטע $[0,1]$ אינסופית בת מנייה . נראה דוגמא בה הפונקציה המוגדרת <u>אינטגרבילית</u> בקטע :

נגדיר $A=\{\frac{1}{n}|n\geq 1\}$ . אז זו קבוצה אינסופית בת מנייה והפונקציה המציינת שלה –

$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin A\\ 1, & x\in A\end{cases}$ אינטגרבילית ב - $[0,1]$ , והסיבה :

נשתמש במשפט המצוטט בתחילת דף התרגיל , ויהי $\varepsilon>0$ . הפונקציה שלנו חסומה בקטע ולכן יש למצוא חלוקה $T$ של הקטע , עבורה יתקיים : $\overline{S}(T)-\underline{S}(T)$ .

קיים $N$ טבעי גדול מספיק כך ש - $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$ . נסתכל בקטע $[\frac{1}{N},1]$ . בקטע זה יש לפונקציה מספר סופי של נקודות אי רציפות , והיא חסומה . לכן אינטגרבילית (הוכחתם בהרצאה ! ) – לכן יש חלוקה $T^*$ של קטע זה , עבורה $\overline{S}(T^*)-\underline{S}(T^*)<\frac{\varepsilon}{2}$ .

בקטע $[0,\frac{1}{N}]$ הערך המקסימלי שהפונקציה מקבלת הוא 1 והמינימלי הוא אפס , ולכן

$Sup_{[0,\frac{1}{N}]}f(x)-Inf_{[0,\frac{1}{N}]}f(x)=1$ , ולכן אם נבנה חלוקה של $[0,1]$ שמורכבת מנקודות החלוקה של $T^*$ יחד עם הנקודה אפס , ונקרא לה חלוקה $T$ אז יתקיים :

$$\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\leq\overline{S}(T^*)-\underline{S}(T^*)+[Sup_{[0,\frac{1}{N}]}f(x)-Inf_{[0,\frac{1}{N}]}f(x)]*\frac{1}{N}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

2.נניח בשלילה כי הפונקציה איננה שווה זהותית לאפס בקטע . אז יש נקודה $c\in(a,b)$

כך ש $f(c)>0$ , ואז מרציפות נקבל קיום קטע $[c-\delta,c+\delta]$ שמוכל כולו בקטע $[a,b]$ וכך שלכל נקודה בקטע $[c-\delta,c+\delta]$ מתקיים $f(x)\geq M>0$ לאיזהשהוא מספר $M$ . מכאן שבכל סכום דארבו עליון נקבל:

$\overline{S}(T)\geq 2\delta\cdot M$ ומכאן שנקבל $\int_a^b f(x)dx\geq 2\delta\cdot M>0$ בסתירה לנתון .

3. כאן יש איזה "טריק" שקשור בהצגת הפונקציה איתה עובדים . נשים לב כי קיים :

ניתן להראות (למשל באינדוקציה ...) כי קיים :

$$sin\frac{i}{2^{2n}}\cdot cos\frac{i}{2^{2n}}\cdot cos\frac{i}{2^{2n-1}}\cdot\cdots\cdot cos\frac{i}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\cdot sin\frac{i}{2^n},\quad 1\le i\le 2^n$$

וכך נקבל : $a_n=\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2^n}\cdot sin\frac{i}{2^n}$ , וזהו סכום רימן המתאים לפונקציה $sinx$ בקטע

$[0,1]$ עם חלוקה שנקודותיה הן קבוצת הנקודות : $\{\frac{i}{2^n}|1\le i\le 2^n\}$ .

מכאן נקבל (...) : $\lim_{n\to\infty}a_{\mathrm{n}}=\int_0^1\sin(x)\,dx=1-\cos(1)$ .

4. הפונקציה שלנו מונוטונית עולה (בידקו) וחסומה בקטע המדובר . ולכן , לפי משפט , אינטגרבילית בו .