

בס"ד

**מבחן במתמטיקה בדידה תש"ע סמסטר קיץ מועד ב**

מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

**הוראות הפעלה:**

יש לענות בפירוט על 5 שאלות בדיוק, כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון. המחברות משמשות לטייטה בלבד, ולא יבדקו.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

| שאלה | ציון |
|------|------|
| 1    |      |
| 2    |      |
| 3    |      |
| 4    |      |
| 5    |      |
| 6    |      |
|      |      |

ציון:

**בהצלחה**

## ענה בפירוט בדף זה

### שאלה 1

- תהינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . נגדיר  $A \bullet B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ .
- א. (1) רשום במפורש את  $\{1, 2\} \bullet \{3, 4, 5\}$ .
- ב. (2) הוכח או הפרך: אם  $A \bullet B = B$  אז  $A = \{1\}$  או  $B = \{0\}$ .
- ג. (2) תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  כך ש- $0, 1 \notin A$ . הוכח או הפרך:  $A \cap (A \bullet A) = \emptyset$ .
- ד. תת קבוצה  $\Delta \subseteq P(\mathbb{R})$  תקרא חסרת כפל אם לכל  $A, B \in \Delta$  מתקיים  $A \bullet B \notin \Delta$ .
- ה. (2) תהי  $\Delta \subseteq P(\mathbb{R})$  קבוצה חסרת כפל. הוכח ש- $\{1\} \notin \Delta$ .
- ו. (2) תן דוגמא לקבוצה  $\Delta \subseteq P(\mathbb{R})$  כך ש- $\Delta = \{A\}$ ,  $A$  אינסופית ו- $\Delta$  קבוצה חסרת כפל.
- ז. (13) הוכח שקיימת קבוצה חסרת כפל  $\Delta \subseteq P(\mathbb{R})$  שהיא מקסימלית ביחס להכלה. כלומר לכל  $\Gamma \subseteq P(\mathbb{R})$  כך ש  $\Gamma \supset \Delta$  (מכילה ממש),  $\Gamma$  אינה חסרת כפל.

### פתרון

- א.  $\{3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ .
- ב. לא נכון: דוגמא נגדית  $A = \{2\}$ ,  $B = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ , ואז  $A \bullet B = B$ .
- ג. לא נכון: דוגמא נגדית  $A = \{2, 4\}$  ואז  $A \cap (A \bullet A) = \{4\}$ .
- ד. נניח בשלילה ש  $\{1\} \in \Delta$  ואז נקבל ש  $\{1\} \bullet \{1\} = \{1\} \in \Delta$  בסתירה לכך ש  $\Delta$  חסרת כפל.
- ה. תהי  $A$  קבוצת המספרים הראשוניים.  $A$  אינסופית ו  $A \bullet A \notin \Delta$ .
- ו. נסמן:  $\{ \text{חסרת כפל } \Gamma : \Gamma \subseteq P(\mathbb{R}) \} =: B$ . מסעיף ה  $B$  שונה מקבוצה ריקה.
- נגדיר על  $B$  את יחס ההכלה ונתבונן בשרשרת כלשהי  $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in I}$  (ז"א  $\dots \subseteq \Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_\beta \subseteq \dots$ ) לא ריקה ב  $B$ .
- נתבונן בקבוצה  $\bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$  ונוכיח שהיא ב  $B$  ז"א שהיא חסרת כפל.
- יהיו  $A, B \in \bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$  על פי הגדרת האיחוד קיימים  $\alpha, \beta \in I$  כך ש  $A \in \Gamma_\alpha, B \in \Gamma_\beta$ . נניח בשלילה ש  $A \bullet B \in \bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$  על פי הגדרת האיחוד קיים  $\delta \in I$  כך ש  $A \bullet B \in \Gamma_\delta$  על פי הגדרת שרשרת ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות ש  $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_\beta \subseteq \Gamma_\delta$  ולכן  $A, B, A \bullet B \in \Gamma_\delta$  בסתירה לכך ש  $\Gamma_\delta$  חסרת כפל. כמובן  $\Gamma_\beta \leq \bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$  לכל  $\beta \in I$ . הראינו שלכל שרשרת ב  $B$  יש חסם מלעיל ב  $B$  ולכן על פי הלמה של צורן יש ב  $B$  איבר מקסימלי. על פי הגדרת  $B$  קיימת קבוצה חסרת כפל  $\Delta \subseteq P(\mathbb{R})$  שהיא מקסימלית ביחס להכלה.

## ענה בפירוט בדף זה

### שאלה 2

א. תנו דוגמא לקבוצה  $A$ , או הוכיחו שלא קיימת, כך ש-  $|A \cap P(A)| = |A|$ , במקרים הבאים:

1. (3) עבור  $|A| = 1$ .

2. (3) עבור  $|A| = 2$ .

ב. (3) הוכח או הפרד: אם  $A \cap P(A) \neq \emptyset$  אז  $\emptyset \in A$ .

ג. (6) תהי  $f: X \rightarrow Y$  ותהיינה  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ , הוכיחו:

$$f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$$

$$f[f^{-1}[B]] = f[X] \cap B$$

ד. (5) יהיו  $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}), (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n}), \dots, (a_{2^n+1,1}, a_{2^n+1,2}, \dots, a_{2^n+1,n}) \in \mathbb{R}^n$

$2^n + 1$  נקודות במרחב  $\mathbb{R}^n$  בעלי קורדינטות שלמות. נסמן ב-  $(c_{ij,1}, c_{ij,2}, \dots, c_{ij,n})$  את

אמצע הקטע שקצותיו הם  $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$  ו-  $(a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n})$  לכל

$1 \leq i \neq j \leq 2^n + 1$ . הראו כי לפחות לאחת מנקודות האמצע הנ"ל קורדינטות שלמות.

זכרו: אמצע הקטע שקצותיו הם  $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$  ו-  $(a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n})$  הוא

$$\left( \frac{a_{i,1} + a_{j,1}}{2}, \frac{a_{i,2} + a_{j,2}}{2}, \dots, \frac{a_{i,n} + a_{j,n}}{2} \right)$$

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א. 1.  $A = \{\emptyset\}$  ואז  $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  במקרה הנ"ל  $|A \cap P(A)| = |A|$ .

2.  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  ואז  $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$  גם במקרה הזה נקבל

$$|A \cap P(A)| = |A|$$

ב. לא נכון – דוגמא נגדית  $A = \{1, \{1\}\}$  ואז  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$  ואז

$$A \cap P(A) = \{1\}$$

ג. יהי  $x \in f[A] \cap B$  על פי הגדרת החיתוך  $x \in f[A] \wedge x \in B$  ז"א  $x \in B$  וגם קיים  $y \in A$

כך ש  $x = f(y)$ . מכיוון ש  $x \in B$  ו  $x = f(y)$  אז  $y \in f^{-1}[B]$ . סה"כ קיבלנו ש

$$y \in A \cap f^{-1}[B] \text{ ומכיוון ש } x = f(y) \text{ נקבל ש } x \in f[A \cap f^{-1}[B]]$$

יהי  $x \in f[A \cap f^{-1}[B]]$  ז"א קיים  $y \in A \cap f^{-1}[B]$  כך ש  $x = f(y)$ . מכיוון ש  $y \in A$  נקבל

ש  $x \in f[A]$  ומכיוון ש  $y \in f^{-1}[B]$  נקבל ש  $x \in B$  סה"כ קיבלנו ש  $x \in f[A] \cap B$ .

הראינו הכלה דו כיוונית ולכן שוויון.

מכיוון ש  $f^{-1}[B] \subseteq X$  או  $f^{-1}[B] \cap X = f^{-1}[B]$  בעזרת סעיף קודם נקבל שלכל  $A \subseteq X$  ובפרט עבור  $A = X$   $f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$   
כעת מכיוון ש  $f^{-1}[B] \cap X = f^{-1}[B]$  נקבל את הדרוש.  $f[X \cap f^{-1}[B]] = f[X] \cap B$

ד. תהי  $S = \{0,1\}^n$ , כל  $n$ -יה ב- $S$  תתפקד כשובך. נמקם כל איבר של  $B$  בשובכים הנ"ל לפי הכלל הבא: את  $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in B$  נמקם בתא  $(b_1 \pmod{2}, b_2 \pmod{2}, \dots, b_n \pmod{2}) \in S$  (כלומר אם האיבר  $b_i$  זוגי אז הרכיב המתאים לו הוא 0 ואם האיבר  $b_i$  אי זוגי אז הרכיב המתאים לו הוא 1). נשים לב ש  $|S| = 2^n, |B| = 2^n + 1$  ולכן לפי עקרון שובך היונים קיימים לפחות 2 איברים ב- $B$  שימוקמו באותו שובך, נסמנם  $(b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$ . עבור 2 איברים אלו  $(b_1 \pmod{2}, b_2 \pmod{2}, \dots, b_n \pmod{2}) = (c_1 \pmod{2}, c_2 \pmod{2}, \dots, c_n \pmod{2})$  ולכן אמצע הקטע שלהם הוא בקורדינאטות שלמות (כיוון שחיבור שני זוגיים נותן מספר זוגי וחיבור שני אי זוגיים נותן מספר זוגי).

## ענה בפירוט בדף זה

### שאלה 3

א. תהינה  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ו-  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  שתי משפחות של קבוצות.  
הוכח:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \quad (3) .1$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \quad (3) .2$$

הוכח או הפרך:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \quad (4) .3$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \supseteq \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha) \quad (4) .4$$

ב. הוכח: לכל משפחה  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  של קבוצות

$$\bigcap_{\alpha \in I} P(A_\alpha) = P\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \quad (3) .1$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} P(A_\alpha) \subseteq P\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \quad (3) .2$$

### פתרון

א.1. יהי  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in I} B_\beta$  על פי הגדרת ההפרש  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \wedge x \notin \bigcup_{\beta \in I} B_\beta$  על פי הגדרת

האיחוד קיים  $\alpha \in I$  כך ש  $x \in A_\alpha$  וגם לכל  $\beta \in I$   $x \notin B_\beta$  ובפרט עבור  $\alpha = \beta$  ועל פי

הגדרת ההפרש  $x \in A_\alpha \setminus B_\alpha$  ועל פי הגדרת האיחוד  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$ .

א.2. יהי  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$  על פי הגדרת ההפרש  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \wedge x \notin \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$  על פי הגדרת

החיתוך קיים  $\alpha \in I$  כך ש  $x \notin B_\alpha$  וגם לכל  $\beta \in I$   $x \in A_\beta$  ובפרט עבור  $\alpha = \beta$  ועל פי

הגדרת ההפרש  $x \in A_\alpha \setminus B_\alpha$  ועל פי הגדרת האיחוד  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$ .

3. לא נכון - דוגמא נגדית  $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, B_1 = \{3\}, B_2 = \{1, 2\}$  אגף שמאל שווה לקבוצה ריקה ואגף ימין שווה ל  $\{1\}$ .

4. נכון - הוכחה - יהי  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \setminus B_\alpha)$  על פי הגדרת החיתוך לכל  $\alpha \in I$   $x \in A_\alpha \setminus B_\alpha$  ז"א

לכל  $\alpha \in I$   $x \in A_\alpha \wedge x \notin B_\alpha$  על פי הגדרת החיתוך וההפרש  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ .

ב. 1.  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} P(A_\alpha)$  על פי הגדרת החיתוך לכל  $\alpha \in I$   $x \in P(A_\alpha)$  ז"א  $x \subseteq A_\alpha$ . יהי

$y \in x$  מכיוון שלכל  $\alpha \in I$   $x \subseteq A_\alpha$  נקבל שלכל  $\alpha \in I$   $y \in A_\alpha$  ועל פי הגדרת החיתוך

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ ז"א } x \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ ועל פי הגדרת קבוצת החזקה } x \in P\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

יהיה  $x \in P\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$  על פי הגדרת קבוצת החזקה  $x \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  על פי הגדרת ההכלה

והחיתוך לכל  $\alpha \in I$   $x \subseteq A_\alpha$  על פי הגדרת קבוצת החזקה לכל  $\alpha \in I$   $x \in P(A_\alpha)$  ועל פי

$$\text{הגדרת החיתוך } x \in \bigcap_{\alpha \in I} P(A_\alpha).$$

2. יהי  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} P(A_\alpha)$  על פי הגדרת האיחוד קיים  $\alpha \in I$  כך ש  $x \in P(A_\alpha)$  ז"א  $x \subseteq A_\alpha$

על פי הגדרת האיחוד  $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  ולכן  $x \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  על פי הגדרת קבוצת החזקה

$$x \in P\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

## ענה בפירוט בדף זה

### שאלה 4

א. תהי  $A$  קבוצה אינסופית ונסמן  $|A| = a$ .

1. (11) נגדיר עבור  $2 \leq n \in \mathbb{N}$  את הקבוצה הבאה

$$Y = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bigcup_{i=1}^n X_i = A, X_i \cap X_j = \emptyset \text{ מתקיים } 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

הוכח  $|Y| = 2^a$ . רמז: התאם לכל  $n$ -יה כנ"ל פונקציה  $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .

2. (5) מצא את  $|\mathbb{N} \cup Y|$ , את  $|\mathbb{N} \times Y|$ , את  $|\mathbb{N}|^{|Y|}$  ואת  $|Y|^{|\mathbb{N}|}$ .

ב. (4) תהי  $\{A_i\}_{i \in I}$  משפחה של קבוצות הזרות זו לזו וכך ש-  $|A_i| = a_i$  לכל  $i \in I$ .

$$\sum_{i \in I} a_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \text{ חשב את } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

### פתרון

א. 1

נגדיר פונקציה  $f: Y \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}^A$  עבור  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Y$  עיני

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g \quad (g \in \{1, 2, \dots, n\}^A) \text{ כעת מכיוון ש } \bigcup_{i=1}^n x_i = A \text{ אז לכל } a \in A \text{ קיים}$$

$1 \leq i \leq n$  כך ש  $a \in x_i$  ואז נגדיר  $g(a) = i$ , מכיוון שכל הקבוצות זרות  $g$  פונקציה.

נוכיח ש  $f$  פונקציה: נניח ש  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

$f((x_1, \dots, x_n)) = g_1$  ו  $f((y_1, y_2, \dots, y_n)) = g_2$  נוכיח ש  $g_1 = g_2$  יהי  $a \in A$  מכיוון ש

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  אז  $a \in x_i \leftrightarrow a \in y_i$  כי אחרת קיים  $j \neq i$  כך ש

$a \in x_i \wedge a \in y_j$  מכיוון ש  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  נקבל ש  $a \in x_i \wedge a \in x_j$

ועל פי הגדרת החיתוך  $a \in x_i \cap x_j$  בסתירה לכך ש  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Y$ .

נוכיח ש  $f$  חח"ע – נניח ש  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1 \neq f(y_1, y_2, \dots, y_n) = g_2$  וז"א קיים

$a \in A$  כך ש  $a \in x_i \wedge a \in y_j$  וז"א  $i = g_1(a) \neq g_2(a) = j$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Y$  אז  $a \notin x_j$  ולכן  $x_j \neq y_j$  וז"א  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

נוכיח ש  $f$  על – יהי  $g \in \{1, 2, \dots, n\}^A$  נתבונן ב-יה הבאה  $(g^{-1}[1], g^{-1}[2], \dots, g^{-1}[n])$ .

מכיוון ש  $g$  פונקציה אם  $i \neq j$  אז  $g^{-1}[i] \cap g^{-1}[j] = \emptyset$  בנוסף  $\bigcup_{i=1}^n g^{-1}[i] = A$

ולכן  $(g^{-1}[1], g^{-1}[2], \dots, g^{-1}[n]) \in Y$  כעת על פי הגדרת  $f$  נקבל ש

$$f((g^{-1}[1], g^{-1}[2], \dots, g^{-1}[n])) = g$$

הראינו ש  $f$  חח"ע ועל ולכן העוצמות שוות והוכחנו את הטענה. (מכיוון ש  $A$  אינסופית אז

$$|2^a| = |n^a|$$

2. א.

על פי סעיף א  $|\mathbb{N}| < |Y|$  ועל פי משפט מההרצאה נקבל ש  $|\mathbb{N} \cup Y| = \max\{|\mathbb{N}|, |Y|\} = |Y| = 2^a$

ובאותו אופן  $|\mathbb{N} \times Y| = \max\{|\mathbb{N}|, |Y|\} = |Y| = 2^a$

$2^{(2^a)}$  . ולכן על פי קנטור ברנשטיין נקבל  $2^{(2^a)}$  .

נתון ש  $A$  קבוצה אינסופית ולכן  $|\mathbb{N}| \leq |A|$  ולכן  $|\mathbb{N}| \cdot a = a$  כעת  $|\mathbb{N}|^a = 2^a$  .

ב.

בעצם יש לחשב את  $\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right|$  כאשר  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  משפחה של קבוצות זרות ולכל  $n \in \mathbb{N}$

$|A_n| = \aleph$  . מכיוון שלכל  $n \in \mathbb{N}$  ,  $|A_n| = \aleph$  , לכל  $n \in \mathbb{N}$  קיימת פונקציה חח"ע ועל

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow A_n$$

נבנה פונקציה  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  כך ש  $f(n, a) = g_n(a)$  נשים לב ש  $f$  חח"ע ועל

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph = |\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = \aleph$$



## ענה בפירוט בדף זה

### שאלה 5

א. (7) מצא נוסחה מפורשת עבור  $a_n = \sum_{k=1}^n k^2$  (רמז: רשום נוסחה רקורסיבית עבור  $a_n$ ).

ב. (8) בכמה דרכים שונות אפשר לסדר 4 ישראלים, 3 צרפתים ו-5 סינים בשורה כך שאף לאדם לא יעמוד כבלוק רציף? (כל האנשים שונים).

ג. (5) יהי  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . מצאו את מספר תת הקבוצות בגודל  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) של

הקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$  שאינן מכילות את הקבוצה  $\{1, 2\}$ .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

### פתרון

א.

נרשום נוסחה רקורסיבית  $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n^2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$  כעת נמצא פתרון פרטי

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn \rightarrow a_{n-1} = an^3 + (b-3a)n^2 + (3a-2b+c)n - a + b - c$$

$$an^3 + bn^2 + cn = an^3 + (b-3a+1)n^2 + (3a-2b+c)n - a + b - c$$

$$\text{ז"א } bn^2 + cn = (b-3a+1)n^2 + (3a-2b+c)n - a + b - c$$

$$\begin{cases} b = b - 3a + 1 \\ c = 3a - 2b + c : \text{ כעת יש לפתור את המערכת הבאה:} \\ 0 = -a + b - c \end{cases}$$

$$\text{נקבל: } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}$$

$$\text{ז"א } a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

כעת נמצא פתרון כללי ללא הומוגני  $a_n = a_{n-1} + d$  ונקבל  $a_n = d$

$$\text{הפתרון הכללי ללא הומוגני הוא } a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d$$

נציב את תנאי ההתחלה  $a_1 = 1$  ונקבל ש  $d = 0$  ולכן התשובה הסופית

$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

ב. נסמן:  $S$  - כל האפשרויות,  $A$  - הישראלים עומדים כבלוק רציף,  $B$  - הצרפתים עומדים כבלוק

רציף,  $C$  - הסינים עומדים כבלוק רציף. יש לחשב את  $|S \setminus (A \cup B \cup C)|$ . נחשב בעזרת

עקרון ההכלה וההדחה את  $|(A \cup B \cup C)|$ .

$$|A| = 4! \cdot 9!, |B| = 3! \cdot 10!, |C| = 5! \cdot 8!,$$

$$|A \cap B| = 4! \cdot 3! \cdot 7!, |A \cap C| = 4! \cdot 5! \cdot 5!, |B \cap C| = 3! \cdot 5! \cdot 6!,$$

$$|A \cap B \cap C| = 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3!, |S| = 12!$$

סה"כ נקבל

$$|S \setminus (A \cup B \cup C)| = 12! - (4! \cdot 9! + 3! \cdot 10! + 5! \cdot 8!) + (4! \cdot 3! \cdot 7! + 4! \cdot 5! \cdot 5! + 3! \cdot 5! \cdot 6!) - 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3!$$

ג. נחשב את האפשרויות הבאות:

אפשרות 1: מספר תתי הקבוצות בגודל  $k$  ללא הספרות 1, 2.

אפשרות 2: מספר תתי הקבוצות בגודל  $k$  ללא הספרה 1 אבל עם הספרה 2.

אפשרות 3: מספר תתי הקבוצות בגודל  $k$  ללא הספרה 2 אבל עם הספרה 1.

אפשרות 1 יש לבחור קבוצה בגודל  $k$  מתוך קבוצה מגודל  $n-2$  ולכן מספר האפשרויות  $\binom{n-2}{k}$ .

אפשרות 2 יש לבחור קבוצה בגודל  $k-1$  מתוך קבוצה מגודל  $n-2$  ולכן מספר האפשרויות

$$\binom{n-2}{k-1}$$

אפשרות 3 יש לבחור קבוצה בגודל  $k-1$  מתוך קבוצה מגודל  $n-2$  ולכן מספר האפשרויות

$$\binom{n-2}{k-1}$$

סה"כ האפשרויות  $\binom{n-2}{k} + 2 \binom{n-2}{k-1}$ .

הערה: אם  $k=0$  אז ניתן לבחור רק את הקבוצה הריקה ואז התשובה היא 1.

## ענה בפירוט בדף זה

### שאלה 6

א. (8) בכמה אופנים ניתן למקם  $n$  כדורים ב- $m$  תאים שונים כך שהתא הראשון לא יישאר ריק. התבונן ב-2 מקרים:

1. כל הכדורים שונים

2. כל הכדורים זהים.

ב. (8) יהיו  $E$  יחס על קבוצה  $A$  ו- $F$  יחס על קבוצה  $B$ . יחס  $G$  על  $A \times B$  מוגדר ע"י  $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in G$  אם ורק אם  $(a_1, a_2) \in E$  ו- $(b_1, b_2) \in F$ .

הוכח או הפרך:

1. אם  $E$  ו- $F$  סימטרים אז  $G$  הוא סימטרי.

2. אם  $E$  ו- $F$  טרנזיטיביים אז  $G$  הוא טרנזיטיבי.

ג. (4) תהי  $A$  קבוצה סופית,  $E$  יחס שקילות על  $A$ , ויהיו  $A_1, \dots, A_k$  כל מחלקות השקילות

השונות של  $A$ . הוכח  $|E| = |A_1|^2 + \dots + |A_k|^2$ .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א1

נחשב תחילה את כל האפשרויות: לכל כדור יש  $m$  אפשרויות ולכן יש סה"כ  $m^n$  אפשרויות. נחשב את כל האפשרויות כאשר תא מספר 1 ריק: כעת לכל כדור יש  $m-1$  אפשרויות ולכן יש סה"כ

$$(m-1)^n$$

כעת מספר האפשרויות הדרוש הוא:  $m^n - (m-1)^n$ .

א2

מכיוון שכל הכדורים זהים השוני בין כל אפשרות הוא מספר הכדורים בכל תא ולכן יש לפתור את הבעיה הבאה: כמה פתרונות יש למשוואה  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$  כאשר  $x_i$  מספר שלם חיובי ו  $x_i$  מספר שלם

אי שלילי לכל  $2 \leq i \leq m$ . ז"א מספר האפשרויות לפתור את המשוואה

$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n-1$  כאשר כל המספרים שלמים ואי שלילים על פי משפא מההרצאה נקבל

$$\binom{n+m-2}{n-1}$$

ב1. נכון

נניח ש  $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in G$  על פי הגדרת  $G$  נקבל ש  $(a_1, a_2) \in E \wedge (b_1, b_2) \in F$  נתון ש  $E$  ו  $F$  סימטריים ולכן  $(a_2, a_1) \in E \wedge (b_2, b_1) \in F$  ועל פי הגדרת  $G$   $((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \in G$ .

ב2. נכון

נניח ש  $((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in G \wedge ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in G$  על פי הגדרת  $G$  נקבל ש

$((a_1, a_2) \in E \wedge (b_1, b_2) \in F) \wedge ((a_2, a_3) \in E \wedge (b_2, b_3) \in F)$  מכיוון ש  $E$  ו  $F$  טרנזיטיביים נקבל

$(a_1, a_3) \in E \wedge (b_1, b_3) \in F$  על פי הגדרת  $G$  נקבל ש  $((a_1, b_1), (a_3, b_3)) \in G$ .

ג.

על פי הגדרת מחלקת שקילות לכל  $1 \leq i \leq n$  הקבוצות  $A_i$  זרות ולכל  $a, b \in A_i$  נקבל ש  $(a, b) \in E$

ולכן לכל  $1 \leq i \leq n$  נקבל  $|A_i|^2$  איברים שונים ב  $E$  בנוסף אם  $(a, b) \in E$  אז קיים  $1 \leq i \leq n$  כך ש

$a, b \in A_i$  ולכן נקבל בדיוק  $|A_1|^2 + \dots + |A_k|^2$  איברים ב  $E$

