לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעא,מבחן לדוגמה2 -פתרון

1. הוכחתם בהרצאה.

2. הוכחתם בהרצאה.

3. יהא V מ"ו נוצר סופית ו $T : V \to V$ ה"ל המקיימת $T^2 = -T$.

(א) הוכיחו: $V = \ker T \oplus \mathrm{Im} T$
פתרון: טענה $\ker T \cap \mathrm{Im} T = \{0\}$. הוכחה: יהא $v \in \ker T \cap \mathrm{Im} T$ אזי

$$Tv = 0$$

(בגלל ש $v \in \ker T$) וגם קיים w כך ש

$$v = Tw$$

(בגלל ש $v \in \mathrm{Im} T$). לכן

$$T^2 w = Tw = 0$$

ומהנתון נקבל

$$-Tw = T^2 w = 0$$

ולכן

$$v = Tw = 0$$

כנדרש.
טענה $\ker T + \mathrm{Im} T = V$.
הוכחה:

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im} T = \dim \left(\ker T + \dim \mathrm{Im} T\right) + \dim \left(\ker T \cap \mathrm{Im} T\right)$$

כאשר השיוויון האדום זה משפט הדרגה והשיוויון הכחול זה משפט המימדים. כעת, כיוון ש $\ker T \cap \mathrm{Im} T = \{0\}$ נקבל

$$\dim V = \dim \left(\ker T + \dim \mathrm{Im} T\right) + \dim \left(\ker T \cap \mathrm{Im} T\right) = \dim \left(\ker T + \dim \mathrm{Im} T\right)$$

ולכן $\ker T + \dim \mathrm{Im} T \subseteq V$ מאותו מימד ולכן שווים כנדרש.

(ב) נניח $\dim V = 5$ הוכיחו/הפריכו: T אינה על.
פתרון: הפרכה: ניקח $T = -I$ היא הפיכה ובפרט על והיא אכן מקיימת

$$T^2 = (-I)^2 = I = -(-I) = -T$$

4. הוכיחו/הפריכו:

(א) יהי V מ"ו ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ אזי:
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס ל V אמ"מ $C = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\}$ בסיס ל V.
פתרון: הוכחה: $(\Leftarrow)$ נניח כי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס ל V. צ"ל $C = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\}$ בסיס ל

V. לפי ההנחה $\dim V = n$ ולכן מספיק להוכיח כי C בת"ל ואז לפי השלישי חינם בסיס. להוכיח שהוקטורים ב C בת"ל שקול להוכיח שוקטורי הקורידאנטות לפי הבסיס B בת"ל. נצייג לפי B ונשים בעמודות מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

כיוון שהדטרמינטטה של מטריצה זו היא

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = -2$$

נקבל שהיא הפיכה ובפרט עמודותיה בת"ל ולכן C בת"ל ולכן בסיס.

$(\Rightarrow)$ נניח $C = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\}$ בסיס . צ"ל $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס. לפי ההנחה $\dim V = n$ ולכן מספיק להוכיח כי C בת"ל ואז לפי השלישי חינם בסיס. להוכיח שהוקטורים ב B בת"ל שקול להוכיח שוקטורי הקורידאנטות לפי הבסיס C בת"ל. נצייג לפי C ונשים בעמודות מטריצה

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

כיוון שהדטרמינטטה של מטריצה זו היא

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = -\frac{1}{2}$$

נקבל שהיא הפיכה ובפרט עמודותיה בת"ל ולכן B בת"ל ולכן בסיס.

(ב) תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ו λ ממשי. קיים $v \neq 0$ ו כך ש $Av = \lambda v$ אמ"מ $|A - \lambda I| = 0$

פתרון: הוכחה: קיים $v \neq 0$ ו כך ש $Av = \lambda v$ אמ"מ קיים $v \neq 0$ ו כך ש $Av - \lambda v = 0$ אמ"מ קיים $v \neq 0$ ו כך ש $(A - \lambda I) v = 0$ אמ"מ $A - I$ לא הפיכה אמ"מ $|A - \lambda I| = 0$

5. אין קשר בין הסעיפים:

(א) תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & * & 0 \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$$

וידוע שלמערכת $Ax = 0$ יש 2פתרונות שונים. מצאו את כל האפשרויות ל A (הוכיחו תשובותכם).

פתרון: אם שני הפתרונות בת"ל נקבל ש $\dim N(A) \geq 2$. מכיוון ש $A \neq 0$ נקבל ש $\text{rank}A \geq 1$ ולכן ביחד (בגלל שמשפט הדרגה אומר $\text{rank}A + \dim N(A) = 3$) נקבל ש

$$\dim N(A) = 2, \quad \text{rank}A = 1$$

מה שאומר ש $\dim C(A) = 1$. כיוון שעמודה הראשונה של Aאינה אפסים היא תהיה בסיס ל $C(A)$ ובפרט שאר העמודות הן כפולות שלה. לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(היחס $\frac{A_{1,2}}{A_{1,1}} = 1$ הוא היחס בין $C_2(A)$ ל $C_1(A)$ והיחס $\frac{A_{2,3}}{A_{2,1}} = 0$ הוא היחס בין $C_3(A)$ ל $C_1(A)$).

אחרת, שתי הפתרונות ת"ל וייתכן ש $\dim N(A) = 1$ (אין אפשרות ש $\dim N(A) = 0$ כי יש פתרון שונה מאפס למערכת $Ax = 0$) ואז נקבל $\text{rank}A = 2$. במקרה זה

- אם $C_1(A), C_2(A)$ הן בסיס אז לא יתכן שהמטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}$$

ועבור כל ערכים $(a,b) \neq (1,1)$ נקבל שבמטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & b & 0 \\ a & 1 & * \end{pmatrix}$$

עמודות $1,2$ בת"ל. כיוון שהשלישית ת"ל בשניים הראשונים, לפי השורה השניה, נוכל להשלים

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & xb - x \\ 1 & b & 0 \\ a & 1 & xba - x \end{pmatrix}$$

לכל x.

- אם $C_1(A), C_2(A)$ הן לא בסיס אז הן ת"ל ולכן המטריצה בצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}$$

ובגלל ש $\mathrm{rank} A = 2$, לכל $(a,b) \neq (0,0)$ נקבל ש

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

מקיימת את המבוקש.

(ב) תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ויהא

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $\mathbb{R}^3$. מצאו בסיס נוסף F כך ש

$$A = [I]_F^E$$

פתרון: נשתמש במשפט מההרצאה

$$[I]_E^F = \left([I]_F^E\right)^{-1} = A^{-1}$$

נחשב A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right)$$

ולכן

$$[I]_E^F = \left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right)$$

ולכן, נסמן $F = \{v_1, v_2, v_3\}$ ואז

$$v_1 = -2\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) + 2\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) - \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$
$$v_2 = 1\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) - 1\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) + \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$
$$v_3 = -1\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) + 2\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

6. תהא $T : V \to V$ ה"ל המקיימת כי $TS = ST$ לכל $S : V \to V$. הוכיחו כי קיים בסיס $v_1, \ldots, v_n$ כך שלכל i $\{Tv_i, v_i\}$ ת"ל.

פתרון: נבחר בסיס ל V $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ונראה שלכל i $\{Tv_i, v_i\}$ ת"ל. יהא i נתון וצ"ל $\{Tv_i, v_i\}$ ת"ל. נב"ש ש $\{Tv_i, v_i\}$ בת"ל אז נוכל להשלים אותם לבסיס C של V ולהגדיר S על ידי מפשט ההגדרה:

$$S(Tv_i) = v_i$$
$$Sv_i = v_i$$

ולכל $v \in C \setminus \{Tv_i, v_i\}$ נגדיר

$$Sv = 0$$

כעת, לפי ההנחה ש $TS = ST$ נקבל בפרט

$$Tv_i = T(Sv_i) = S(Tv_i) = v_i$$

כאשר השיוויונות באדום זה מהגדרת S. קיבלנו ש $Tv_i = v_i$ ולכן $\{Tv_i, v_i\}$ ת"ל. סתירה.