הומומורפיזמים

תרגיל: האם $f: G \to G$ שמוגדרת $f(g) = g^{-1}$ היא הומומורפיזם?

פתרון:

$$f(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$$

$$f(g)f(h) = g^{-1}h^{-1}$$

יתקיים שוויון לכל g, h אמ"ם החבורה אבלית.

ולכן ההעתקה הנ"ל היא הומומורפיזם רק עבור חבורה אבלית. ובמקרה הזה היא אפילו אוטומורפיזם (איזומורפיזם מחבורה לעצמה).

מי ההופכית? היא עצמה.

$$f(f(g)) = f(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$$

תרגיל: $f: G \to H$ אפימורפיזם. וG ציקלית. הוכיחו שH ציקלית.

פתרון:

$$G = \langle a \rangle$$

נראה ש:

$$H = \langle f(a) \rangle$$

יהי $h \in H$. יש לו מקור, g. (ייתכן שיש כמה מקורות).

$$g = a^n$$

$$h = f(g) = f(a^n) = (f(a))^n$$

כלומר, הראינו שכל איבר הוא איזושהי חזקה של $f(a)$.

תרגיל: האם קיים אפימורפיזם $f: D_4 \to \mathbb{Z}_8$?

פתרון: אם יש אפימורפיזם אז הוא גם איזומורפיזם (כי העתקה על משתי קבוצות סופיות באותו גודל חייבת להיות גם חח"ע).

כלומר, אם יש אפימורפיזם אז החבורות איזומורפיות (כי יש בינהן איזומורפיזם). וזה לא ייתכן למשל כי אחת אבלית והשניה לא.

תרגיל: האם ייתכן שיש אפימורפיזם $f: G \to H \neq \{e\}$ כאשר G סופית לא ציקלית וH כן ציקלית?

פתרון:

$$f: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$$

$$f(a, b) = a$$

$$U_{12} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

תרגיל: האם קיים מונומורפיזם

$$f : GL_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^{10} = \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$$

פתרון: לא קיים. כי $\mathbb{Q}^{10}$ היא אבלית, ו$GL_2(\mathbb{Q})$ לא אבלית.
אז נקח $a, b \in GL_2(\mathbb{Q})$ שלא מתחלפים.

$$f(ab) = f(a)f(b) = f(b)f(a) = f(ba)$$

מהחח"ע נקבל ש$ab = ba$, סתירה.
תרגיל: האם קיים איזומורפיזם מ$(\mathbb{Q},+)$ ל$(\mathbb{Q}_+, \cdot)$?
פתרון: נניח שכן. נקרא לו f.

$$f : \mathbb{Q}, + \to \mathbb{Q}_+, \cdot$$

ל3 יש מקור. כי f על. יש $x \in \mathbb{Q}$ כך ש

$$f(x) = 3$$

קיים $y \in \mathbb{Q}$ כך ש$x = y + y$.

$$f(y)f(y) = f(y+y) = f(x) = 3$$

אבל ידוע שלא קיים מספר רציונלי שבריבוע שווה ל3 .

החבורה הסימטרית/חבורת התמורות

לכל n מוגדרת החבורה הסימטרית מסדר n, S_n והיא שווה לקבוצה של כל הפונקציות החח"ע ועל מ$\{1, ..., n\}$ ל$\{1, ..., n\}$ עם פעולת ההרכבה.

$$|S_n| = n!$$

איך כותבים איברים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1 \to 2$$

$$2 \to 7$$

וכו'

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

איך מחשבים את ההופכי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

מחזורים:

$$(a_1, a_2, .., a_k)$$

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \to ...a_k \to a_1$$

הערה: איבר בחבורה הסימטרית נקרא "תמורה".
כל תמורה אפשר לכתוב כמכפלה של מחזורים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1,2,7,6,3,4,5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1)(2)(3,4)(5)(6,7) = (3,4)(6,7)$$

$$(1,3,4)(5,7,2,6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(a_1, ..., a_k)^{-1} = (a_k, ..., a_1)$$

לדוגמא:

$$(1,2,7,6,3,4,5) = (5,4,3,6,7,2,1)$$

מה הסדר של מחזור מאורך k? תשובה: k.
טענה: כל תמורה אפשר לכתוב כמכפלה של מחזורים זרים. (כלומר, אין מספר שמופיע בשניהם).
הערה: S_n לא אבלית! (עבור $n \geq 3$)

$$(1,2)(1,3) = (1,3,2) = (2,1,3)$$

$$(1,3)(1,2) = (1,2,3)$$

זאת לא אותה פונקציה. הפונקציה הראשונה שולחת את 1 ל3. הפונקציה השניה שולחת את 1 ל2.

הערה: מחזורים זרים מתחלפים. למשל:

$$(1,3,4)(5,7,2,6) = (5,7,2,6)(1,3,4)$$

מה הסדר של מכפלה של מחזורים זרים?
תשובה הlcm של הסדרים של כל אחד מהמחזורים.
למשל,

$$o(1,3,4)(5,7,2,6) = lcm(3,4) = 12$$

$$o\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = ?$$

נפרק למכפלה של מחזורים זרים.

$$o(1,6,5,4,2,7,3) = 7$$

מה הסדרים האפשריים של איברים בS_4?
פתרון:
1
4 - $(1,2,3,4)$
3- $(2,3,4)$
2 $(1,2),(3,4)$
מה הסדרים האפשריים של איברים בS_5?
6- $(1,2)(3,4,5)$
וכל סדר קטן שווה מ5 אפשרי, כי ניקח מחזור מהסדר הזה.
מסקנה: בS_n יכול להיות איבר מסדר גדול מn.
תרגיל: האם קיים איבר מסדר 39 בS_{15}?
פתרון: איך אפשר להגיע לאיבר מסדר 39?
שתי אפשרויות: מחזור מאורך 39 - לא ייתכן.
2 מחזורים זרים, אחד מאורך 3 ואחד מאורך 13 - בשביל זה צריך 16 מספרים. לא ייתכן.
תרגיל: האם יש תת חבורה מסדר 45 בS_{15}?
פתרון:

$$\langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9)(10,11,12,13,14) \rangle$$

זאת תת חבורה ציקלית מסדר 45.
סימן של תמורה:
הגדרה: סימן של מחזור מאורך k הוא $(-1)^{k-1}$.

$$sign(1,2) = -1$$

$$sign(1,3,4) = 1$$

תמורה נקראת זוגית אם הסימן שלה הוא 1.
סימן של תמורה שווה מכפלת הסימנים בפירוק שלה למחזורים.
הערה: בימן הוא כיפלי. כלומר, לכל שתי תמורות f_1, f_2

$$sign(f_1 f_2) = sign(f_1) sign(f_2)$$

שאלה: למה שווה

$$sign(f^{-1}) = ?$$

תשובה: לסימן של $sign(f)$.
הסבר: $sign(e) = 1$, כי $e = (1)(2)\cdots(n)$ והסימן של מחזור מאורך 1 הוא 1.
לכן

$$1 = sign(e) = sing(ff^{-1}) = sign(f) sign(f^{-1})$$

צאז אם $sign(f) = 1$, ככה גם $sign(f^{-1})$
ואם $sign(f) = -1$ אז גם $sign(f^{-1}) = -1$.
הערה: אוסף כל התמורות הזוגיות (שהסימן שלהן הוא 1) הוא תת חבורה, כי איבר היחידה הוא תמורה זוגית, יש סגירות לכפל וסגירות להופכי.
התת חבורה הזאת מסומנת בA_n.

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

כיתבו את A_4:

$$e = (1)(2)(3)(4)$$

$$(1,2,3)$$

$$(1,2,4)$$

$$(1,3,4)$$

$$(1,3,2)$$

$$(2,3,4)$$

$$(1,4,2)$$

$$(1,4,3)$$

$$(3,2,4)$$

$$(1,2)(3,4)$$

$$(1,3)(2,4)$$

$$(1,4)(2,3)$$

$$(1,3,2)(4,3)$$

זה כל האיברים.
שאלה: כמה מחזורים יש מאורך k בתוך S_n?

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{k!}{k}$$

בוחרים k איברים. מסדרים בשורה. אבל נשים לב שיש סידורים שונים שנותנים את אותו מחזור (למשל $(1,4)$ ו$(4,1)$). וזה מתקבל מלקחת את המחזור ולסובב אותו. ניתן לעשות זאת k פעמים, ולכן בסוף צריך לחלק בk). או בקצרה: בוחרים k איברים ומסדרים במעגל.

$$\varphi(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$$

$$\varphi(n) = n \mod 2$$

$$\varphi^{-1}(0) = 0$$

$$\varphi^{-1}(1) = 3$$