סיבוכיות מקום

כשאנו מדברים על סיבוכיות מקום, לא מעניין אותנו כמה מקום הקלט והפלט תופסים - אלא רק בכמה מקום משתמשים בשביל לפתור את הבעיה. לכן צריך להפריד בין הסרטים של הקלט, הפלט והעבודה.

הגדרה 1

תהי M מכונת טיורינג דטרמיניסטית העוצרת לכל קלט. סיבוכיות המקום של M היא $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כאשר $s(n)$ הוא האינדקס הגדול ביותר אליו M מגיעה בסרט העבודה שלה לכל קלט באורך n.

הגדרה 2

$$\mathrm{DSPACE}\left(s\left(n\right)\right)=\left\{L\;\middle|\;\begin{array}{c}\text{There exists a deterministic turing machine } L\\ \text{that determines } L \text{ in space complexity } s\left(n\right)\end{array}\right\}$$

הקשר בין זמן ומקום

1. $\mathrm{DTIME}\left(t\left(n\right)\right)\subseteq\mathrm{DSPACE}\left(s\left(n\right)\right)$ כי מכונה שעושה $s\left(n\right)$ צעדים לא יכולה להשתמש ביותר מאשר $t\left(n\right)$ תאים על סרט העבודה שלה.
2. $\mathrm{DSPACE}\left(s\left(n\right)\right)\left(n\cdot 2^{O(s(n))}\right)$. למה?

   אנו מדברים על מכונות שעוצרות לכל קלט, ומתברר שברגע שהמכונה עוצרת, אי אפשר להשתמש בכל תא "יותר מדי" פעמים.

הגדרה - קונפיגורציה

- מיקום ראש סרט קלט
- מיקום ראש סרט עבודה
- תוכן סרט העבודה
- המצב הפנימי של המכונה

המידע הזה קובע לנו בצורה ברורה את המצב של המכונה. אם המכונה מגיעה שוב לאותו מצב, בעצם נכנסים ללולאה אינסופית, ולכן מספר הצעדים חסום ע"י מספר הקונפיגורציות. כמה קונפיגורציות יש?

- מיקום ראש סרט קלט - $\log n$
- מיקום ראש סרט עבודה - $\log s\left(n\right)$
- תוכן סרט העבודה - $s\left(n\right)$
- המצב הפנימי של המכונה - $O\left(1\right)$

משפט

$L \in \mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right) \iff L$ היא רגולרית

האם כל עליה נותנת לנו כוח משמעותי מעבר לשפות רגולריות?

האינטואיציה הראשונית אומרת שעם פחות מ$\log n$ ביטים אנחנו לא יודעים בכלל מה אורך הקלט ולכן אי אפשר לעשות דברים משמעותיים. אבל זה לא נכון - מתברר שהפונקציה המינימלית הנדרשת לדברים משמעותיים היא $\log\log n$.

טענות

1. $\mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right) \subsetneq \mathrm{DSPACE}\left(O\left(\log\log n\right)\right)$
2. $\mathrm{DSPACE}\left(o\left(\log\log n\right)\right) = \mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right)$[1]

הוכחת טענה 1

נראה שקיימת שפה L כך ש:

1. $L \notin \mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right)$
2. $L \in \mathrm{DSPACE}\left(\log\log n\right)$

עבור k טבעי:

$$w_k = 0^k * 0^{k-1}1 * 0^{k-2}10 \cdots * 1^k$$

$$L = \{w_k|\}$$

כלומר: $k=2 \qquad w_2 = 00*01*10*11$

$k=3 \qquad w_3 = 000*001*010*011*100*101*110*111$

$L \notin \mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right)$ - L היא לא דטרמיניסטית(למת הניפוח). נשאר להוכיח $L \in \mathrm{DSPACE}\left(O\left(\log\log n\right)\right)$

בהינתן קלט x, נרצה לדעת האם $x = w_k$ עבור איזשהו k.

1. נבדוק שהבלוק הראשון מורכב כולו מאפסים(עד ה* הראשונה)
2. נבדוק שהבלוק האחרון מורכב כולו מאחדות(עד ה* הראשונה מהסוף)
3. נבדוק שכל בלוק הוא קידום ב1 של הבלוק הקודם

[1] תזכורת: O אומר קטן או שווה אסימפטוטית וo אומר קטן ממש אסימפטוטית.

עבור צעדים 1 ו2 צריך מקום קבוע.

בהינתן 2 בלוקים בגודל k, איך נבדוק שבלוק אחד הוא קידום ב1 של הבלוק השני?

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

בשביל זה צריך $\log k$ ביטים, אבל $x \in L$, מובטח ש$2^k \approx n = |x|$ ו$k = O(\log n)$.

אבל אם $x \notin L$, לא מובטח לנו שהבלוקים הם בגודל $\log n$! ולכן סיבוכיות המקום לא בהכרח $O(\log \log n)$

הרעיון הוא:

עבור $i = 1, 2, 3, \ldots$ נסתכל על i הביטים האחרונים בכל בלוק, ונעשה את הבדיקות של האלגוריתם הקודם על i הביטים הללו. נעצור אם בשלב כלשהו נגדלה שהבלוקים לא באותו אורך(בבלוק מתאים יש פחות מi ביטים). אם כל הבלוקים בגודל i והבדיקות הצליחו - נחזיר 1.

טענה: יהי i' הi עבורו האלגוריתם עוצר. אזי:

1. סיבוכיות המקום של האלגוריתםפ היא $O(\log i')$
2. $i' \leq O(\log n)$

הוכחה:

1. כמו האלגוריתם הראשון עבור $k = i'$
2. עבור $i' - 1$ האלגוריתם לא נכשל. כלומר היו לנו $2^{i'-1}$ בלוקים בגודל $i' - 1$.

$$n \geq (i' - 1) \cdot 2^{i'-1}$$

$$\implies i' \leq O(\log n)$$