

## העדפות והצבעות

במערכות בחירות, אנחנו רוצים למקסם את התועלת הכללית (רווחת הכלל - social welfare). יש שיטות שונות לבצע בחירות.

בארה"ב, כל מדינה בוחרת אלקטורלים והם בוחרים את הנשיא, וזה יכול להביא למצב שרוב העם רוצה נשיא אחד אבל רוב המדינות בוחרות בנשיא אחר. המטרה של השיטה הזו היא שלכל מדינה יהיה נציג שהם יוכלו לפנות אליו.

### בחירות מסוג Preference Ballot

- כל אחד מהבוחרים מדרג את המועמדים לבחירה לפי סדר העדיפויות שלו

#### כללים - טרנזיטיביות ואלימינציה

- טרנזיטיביות - אם מעדיף מועמד  $A$  על פני  $B$  ו  $B$  על פני  $C$ , אז מעדיף  $A$  על פני  $C$
  - אלומינציה - גם במקרה שאחד מהמועמדים פורש מהמירוץ, ההעדפות היחסיות של כל בוחר בין המועמדים שנתרו לא משתנות
- אז איך מחליטים מי ניצח?

#### שיטה ראשונה - בחירה על פי Plurality

המועמד שקיבל את המספר הרב ביותר של קולות בעדיפות ראשונה הוא המנצח. זהו הרחבה של עיקרון הרוב (majority) - אם יש שני מועמדים אז plurality ו majority זה אותו דבר. אם יש יותר משני מועמדים, אז לא בהכרח שי majority אבל תמיד יש plurality. יש גם super majority - שצריך יותר מ-50% מהקולות בשביל להעביר החלטה.

#### קריטריון Majority Criterion

אם מישהו מקבל את מירב הקולות - הוא חייב להיות הזוכה. בחירה על פי plurality מקיימת את הקריטריון הזה, שכן אם מישהו זכה ב majority הוא אוטומטית זכה גם ב plurality

#### קריטריון Condorcet

(נקרא על שם marquis de Condorcet)  
אם יש בחירה שבהשוואה בזוגות מנצחת כל בחירה אחרת אזי בחירה זו צריכה להיות המנצחת בבחירות. מועמד הזוכה בכל השוואת head-to-head מול כל המועמדים האחרים נקראת condorcet candidate שיטת plurality לא מקיימת את עקרון Condorcet

#### שיטה שנייה - Borda Count

ניתן נקודות לכל דירוג. מי שהגיע למקום הראשון יקבל כמות גדולה נקודות, במקום השני פחות נקודות, במקום השלישי עוד פחות נקודות וכו'. השיטה מבטיחה שהזוכה הוא הפשרה הטובה ביותר - כולם לפחות קצת אוהבים אותו. אם יש  $N$  מועמדים בבחירות, ניתן להעדיף האחרונה נקודה אחת, להעדיף לפני האחרונה 2 נקודות, וכן הלאה עד  $N$  נקודות להעדיף הראשונה הבעיה היא שהשיטה הזו יכולה להפר גם את Majority Criterion וגם את קריטריון Condorcet.

## שיטה שלישית - Runoff Voting (plurality with elimination)

אנחנו מנסים בכל זאת לבחור מועמד שיש לו Majority. כדי לעשות זאת, נוציא מועמדים שקיבלו הכי פחות קולות בעדיפות ראשונה.

כדי למנוע עיוותים נרצה להוציא בכל שלב רק את המועמד האחרון. בבחירות בדרך כלל בוחרים את השניים הכי טובים כדי להגביל את מספר הפעמים שצריך לעשות בחירות חוזרות, אבל בשיטת Preference Ballot לא צריך בחירות חוזרות אז אין בעיה להוציא אחד כל פעם. כאשר יש רוב כבר לא צריך להוציא מועמדים ואפשר לסיים.

הבעיה בשיטה הזו היא שהיא לא מקיימת את קריטריון Condorcet, וגם את קריטריון המונוטוניות:

## קריטריון המונוטוניות - The Monotonicity Criterion

אם  $X$  צפוי לזכות וכל מה שמשתנה זה גידול במספר הבוחרים של  $X$  בעדיפות ראשונה, אז  $X$  צריך להישאר המנצח

## שיטה רביעית - Pairwise Comparisons

קיום טורניר round-robin בין כל זוג מועמדים, כאשר כל ניצחון נותן נקודה אחת. מי שמקבל הכי הרבה נקודות מנצח.

השיטה מקיימת את שלושת העקרונות:

- Majority Criterion •
- Condorcet Criterion •
- The Monotonicity Criterion •

הבעיה היא שאם משיהו מחליט לפרוש מהמרוץ, זה יכול לשנות את התוצאה גם אם אותו מועמד לא היה אמור לזכות, מה שמפר את הקריטריון הרביעי:

## קריטריון The Independence of Irrelevant Alternatives Criterion

אם בחירה  $X$  היא הזוכה בבחירות ואחת או יותר מהבחירות האחרות נפסלת, אזי  $X$  עדיין צריך להיות המנצח.

## דירוג - Ranking

ניתן להשתמש בשיטות הנ"ל גם כדי לקבוע דירוג כללי של המועמדים - שיטות \* extended

- extended plurality קובעים את הדירוג לפי מספר הבחירות של כל אחד בעדיפות ראשונה •
- extended borda count קובעים את הדירוג לפי כמות הנקודות הסופית •
- extended runoff voting הדירוג הסופי יהיה הפוך לסדר ההדחה •
- extended pariwise comparison קובעים את הדירוג לפי כמות הנקודות הסופית •

אפשר גם להשתמש בשיטות האלה בצורה רקורסיבית: אחרי שמוצאים את המקום הראשון, מוצאים אותו ומפעילים את השיטה שוב כדי לבחור את המקום השני - שיטות \* extended with elimination

- שיטת extended plurality with elimination מאפשרת לכל מי שבחרו בזה שהגיע למקום ראשון, להגיד משהו גם על ההעדפות שלהם למקום השני •

## מסקנה חשובה

אם יש בחירות, כמעט ולא תהיה אופציה שלא ניתן למצוא פרוטוקול בחירות שיביא לניצחונה

# Weighter Voting System

מורכבת מ: שחקנים קבוצת המצביעים  $P_1, \dots, P_N$

משקלות מספר הקולות שבשליטת כל שחקן  $w_1, \dots, w_N$

quota המספר המינימלי של הקולות הנדרשים לצורך קבלת החלטה. צריך לקיים -  $\sum_{i=1}^N w_i > q$

$$\sum_{i=1}^N \frac{w_i}{2}$$

ניתן לייצג את המערכת בתור  $[q : w_1, w_2, \dots, w_N]$

## דיקטטור

ברגע שיש משהו עם  $w_i > q$  הוא נקרא דיקטטור, שכן הוא יכול לקבל החלטה לבדו, וכל השחקנים האחרים נקראים Dummy שכן הבחירה שלהם לא משפיעה על ההחלטה

## ווטו

שחקן שיכול לחסום כל הצבעה הוא בעל כוח וטו - צריך להתקיים  $q > w_i > \sum_{j=1}^N \frac{w_j}{2}$

## אלו שחקנים יכולים להעביר החלטה?

[51 : 49, 45, 6]

נשים לב שכאן לכל השחקנים כוח שווה - כל זוג יכול להעביר החלטה, אבל אף אחד לבד לא יכול

## הגדרות - קואליציה

- קואליציה - קבוצת שחקנים המאחדים כוחות לצורך הצבעה
  - משקל הקואליציה (weight of the coalition) - מספר הקולות הכולל הנשלט על ידי הקואליציה
  - קואליציות מנצחות (winning coalitions) - הקואליציות שמסוגלות להעביר החלטה
  - קואליציות מפסידות (losing coalitions) - הקואליציות שאינן מסוגלות להעביר החלטה
  - שחקן קריטי (critical player) - שחקן שבלעדיו winning coalition הופכת לlosing coalition
- נשים לב - בקואליציות מפסידות לא יכול להיות שחקן קריטי - כי גם ככה הן מפסידות. בקואליציות מנצחות לפעמים אין שחקן קריטי, לפעמים אין, בדרך כלל יש יותר משחקן קריטי אחד.

## The Banzhaf Power Index

הכוח (power) של כל שחקן פרופורציונאלי למספר הקואליציות בהן הוא שחקן קריטי

$B$  מספר הקואליציות בהן שחקן  $P$  הוא קריטי

$T$  מספר הפעמים הכולל שבהן שחקן כלשהו היה קריטי

$$\text{Banzhaf Power Index} = \frac{B}{T}$$

רשימת הכוח של השחקנים השונים נקראת Banzhaf Power Distribution

## Shapley-Shubik Power Index

הרעיון - לא להסתכל רק על איזה קואליציה נוצרה אלא גם על הסדר בו הצטרפו לקואליציה, כי ברגע שהצטרפו מספיק שחקנים השחקנים החדשים שמצטרפים לא חשובים. מוצאים את כל הקואליציות לפי סדר ההצטרפות (כלומר  $\{P_1, P_2\} \neq \{P_2, P_1\}$ ) ולכל אחת כזו מוצאים את השחקן שהפך אותה מקואליציה מפסידה לקואליציה מנצחת.

## בחירה מרובה

לשיטות האלו יש overhead מאוד גבוה. בד"כ אפשר להשיג תוצאה טובה אם מאפשרים לכל שחקן לבחור כמה אלטרנטיבות ולתת לכולן אותו משקל.