24.08.24

תרגול 10

אינטרפולציה

המטרה: למצוא פונקציה ככל האפשר המייצגת בצורה מורכבת התנהגות של פונקציה כלשהי f.

נתונות נקודות בסיס $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$

ומחפשים פונקציה רק ש- $f(x_i)=y_i$

דוגמא: נתונות פונקציות הבסיס הבאות:

$$1,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

מצא קירוב באמצעות אינטרפולציה העובר דרך 3 הנקודות הבאות:

$(0,0),(1,1),(2,4)$

פתרון: נחפש פונקציה f רק ש-

$$f(x)=\underline{C_0}\cdot 1+\underline{C_1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\underline{C_2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \\ f(2)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_0+C_2=0 \\ C_0+C_1=1 \\ C_0-C_2=4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2C_0=4 \Rightarrow \boxed{C_0=2}$$
$$C_0+C_1=1 \Rightarrow \boxed{C_1=-1}$$
$$C_0+C_2=0 \Rightarrow \boxed{C_2=-2}$$

$$\Rightarrow f(x)=2-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

חיסרון: הופכית-קשה לחשוב.

Cond - של המטריצה גבוה.

תזכ' הגדרה: אינטרפולציה באמצעות $n+1$ פונקציות בסיס שהן פולינומים מעלות 0 עד n נקראת אינטרפולציה פולינומית.

שיטת לגרנג'

השיטה: נבנה את פולינום האינטרפולציה באופן הבא:

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

דוגמא: נתונות הנקודות ממוקמים:

$$\overset{0}{(0,0)};\ \overset{1}{(1,1)};\ \overset{2}{(2,4)}$$

נמצא את פולינום האינטרפולציה בשיטת לגרנג':

פתרון:

$$l_0(x) = \frac{x-1}{0-1}\cdot\frac{x-2}{0-2} = [-(x-1)]\cdot[-\tfrac{1}{2}(x-2)]$$

$$\Rightarrow l_0(x_1)=0;\ l_0(x_2)=0;\ l_0(x_0)=1$$

$$l_1(x) = \frac{x-0}{1-0}\cdot\frac{x-2}{1-2}$$

$$l_1(x_0)=0;\ l_1(x_2)=0;\ l_1(x_1)=1$$

$$l_2(x) = \frac{x-0}{2-0}\cdot\frac{x-1}{2-1}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(x_0)\cdot l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)\cdot l_2(x)$$

$$= \overset{y_0}{0}\cdot l_0(x) + \overset{y_1}{1}\cdot l_1(x) + \overset{y_2}{4}\cdot l_2(x) = 1\cdot(-x\cdot(x-2)) + 4\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{x-1}{1}\right) =$$

$$= -x^2+2x+2(x^2-x) = -x^2+\cancel{2x}+2x^2-\cancel{2x} = \boxed{x^2}$$

יתרון: ה- Condition number מינימלי, נקבל ש' היחידה.

חסרון: כל הוספה של נקודה מצריכה חישוב של הפולינום מחדש.

שיטת ניוטון - שיטת ההפרשים המחולקים

רעיון: בהינתן $n+1$ נקודות $(x_0,y_0);\ldots;(x_n,y_n)$

שיטת ניוטון בונה את הפולינום האינטרפולציה באופן הדרגתי שלב אחרי שלב. בשלב ה-0 נוודא כי הפונקציה מקיימת את הנקודה (x_0,y_0), ונקבל פולינום ממעלה 0.

בשלב ה-K נבצע "תיקון" - נשנה את הפולינום רק שיעבור גם בנקודה ה-K ע"י התנאי הבא:

$$P_K(x)=P_{K-1}(x)+C_K\cdot(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{K-1})$$

כאשר נמצא את C_K נדרוש

$$P_K(x_K)=y_K$$

דוגמא: יהי P_3 פולינום האינטרפולציה העובר בנקודה $(0,0);(0.5,4.25);(1,3);(2,2)$

מצא את $P_3(x)$ עפ"י שיטת ניוטון.

פתרון: $K=0$:

$$P_0(x)=C_0$$

$$P_0(0)=0 \quad (0;0)$$

$$\Rightarrow C_0=0 \Rightarrow P_0(x)=0$$

$K=1$: $(0.5,4.25)$:

$$P_1(x)=P_0(x)+C_1\cdot(x-0)= =C_1\cdot x$$

$$P_1(0.5)=4.25 \Rightarrow \tfrac{1}{2}C_1=4.25 \Rightarrow C_1=8.5$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1(x)=8\tfrac{1}{2}x}$$

$K=2$: $(1,3)$:

$$P_2(x)=P_1(x)+C_2(x-0)(x-\tfrac{1}{2})=$$

$$P_2(x)=8\frac{1}{2}x+C_2x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$P_2(1)=3 \Rightarrow 8\frac{1}{2}+\frac{1}{2}C_2=3$$

$$\boxed{C_2=-11}$$

$$\Rightarrow P_2(x)=8\frac{1}{2}x-11\cdot x\left(x-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-11x^2+14x}$$

K=3: (2,2)

$$P_3(x)=P_2(x)+C_3\cdot(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=-11x^2+14x+C_3(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$P_3(2)=2 \Rightarrow -44+28+C_3\cdot\left(2\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 1\right)=2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_3=6}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_3(x)=6x^3-20x^2+17x}$$

יתרון: הוספת נקודה לא מצריכה חישוב מהתחלה אלא רק הוספת שלב.

חיסרון: ייצוג ע"י מט' משולשית שקשה יותר לחשב את ההופכית שלה.

הגדרה נוספת של שיטה זו

$$P_N(x)=y_0+y_{10}(x-x_0)+y_{210}(x-x_0)(x-x_1)+\dots$$
$$+\dots+y_{N\dots10}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{N-1})$$

$$y_{n(n-1)\dots0}=\frac{y_{(n-1)\dots1}-y_{(n-1)\dots0}}{x_n-x_0}$$

דוגמא: (2,4);(1,1);(0,0)

מצא פולינום אינט' בשיטת ניוטון.

פתרון:

x	y		
0	0	$\frac{1-0}{1-0}=\boxed{1}$	$\frac{3-1}{2-0}=\boxed{1}$
1	1	$\frac{4-1}{2-1}=\boxed{3}$	
2	4		

משתמשים תמיד רק בשורה העליונה (בעיגול).

$$\Rightarrow P_3(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + 1(x-0)(x-1)$$
$$= \cancel{x} + x^2 \cancel{-x} = \boxed{x^2}$$

ניסוח השיטה: כלומר נחשב את ה-y הבא (לצורך
הצבה כולה) באופן הבא:

$$\frac{y_L - y_4}{x_L - x_4}$$

ה-x - החיצוניים ביותר.

ה-y העליון בכל שורה יהיה ה-c.

$$P_N(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots$$

דוגמא:
$(0,0)$; $(0.5, 4.25)$
$(1,3)$; $(2,2)$

x	y			
0	0	$\frac{4.25-0}{0.5-0} = \boxed{8.5}$	$\frac{-2.5-8.5}{1-0} = \boxed{-11}$	$\frac{1+11}{2-0} = \boxed{6}$
0.5	4.25	$\frac{3-4.25}{1-0.5} = \boxed{-2.5}$	$\frac{+2.5-1}{2-0.5} = \boxed{1}$	
1	3	$\frac{2-3}{2-1} = \boxed{-1}$		
2	2			

$$\Rightarrow P_3(x) = 0 + 8.5\cdot(x-0) - 11(x-0)(x-\tfrac{1}{2}) + 6(x-0)(x-\tfrac{1}{2})(x-1)$$
$$= \text{---} = \boxed{}$$

דוגמא: קרב את הפונקציה $f(x)=x^3$ פולינום ממעלה 2 המעבר בנקודה $1,2,3$. בשיטת ניוטון.

x	y		
1	$\boxed{1}$	$\boxed{7}$	$\frac{19-7}{3-1} = \boxed{6}$
2	8	$\frac{27-8}{3-2} = 19$	
3	27		

המשך

$P_2(x) = 1+7\cdot(x-1)+6(x-1)(x-2) =$

$= 1+7x-7+6x^2-18x+12 = \boxed{6x^2-11x+6}$

תרגיל: יהי $P_3(x)$ פולינום אינטרפולציה העובר דרך הנק':

(0,1)

(2,7)

(1,5)

(3,y)

מצא את y אם המקדם של x^3 הוא 1.

x	y			
0	1			
1	5	4		
2	7	2	-1	
3	y	$\frac{y-7}{1}$	$\frac{y-7-2}{2}=\frac{y-9}{2}$	$\frac{\frac{y-9}{2}+1}{3}$

$$C_3 = \frac{\frac{y-9}{2}+1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{y-9}{2}+1=3$$

$$\frac{y-9}{2}=2 \Rightarrow y-9=4 \Rightarrow \boxed{y=13}$$

$$\Rightarrow P_3(x) = x^3+\square x^2+\square x+\square$$

ב. איך הפתרון היה משתנה אם המקדם של $x=1$.

$$P_3(x)=1+4(x-0)-1(x-0)(x-1)+\left(\frac{\frac{y-9}{2}+1}{3}\right)(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= 1+4x-1(x^2-x)+\left(\frac{y-7}{6}\right)(x^3+3x^2+2x)$$

המקדם של $x =$ $4+1+2\cdot\frac{y-7}{6}=1$

$$-4=\frac{y-7}{3}$$

$$-12=y-7 \Rightarrow \boxed{y=-5}$$

תרגיל: נתון פולינום $P_2(x)=x^2+3x-4$

פולינום האינטרפולציה של הנקודות הבאות:

$$(-3,-4);(x_1,y_1);(2,0)$$

(1) מהי הנקודה השלישית שקובעת באופן יחיד פולינום זה?

פתרון: ישנן אינסוף נקודות כאלה:

כל נקודה שמקיימת:

$$x_1^2+3x_1-4=y_1.$$

(2) התווסף נתון לשאלה שקובע שפולינום זה נקבע ע״י נקודות הנמצאות במרווחים שווים על ציר ה-x, והנק׳ החסרה נמצאת בין 2 הנק׳ האחרות. מצא את x_1,y_1.

$$x_1=-1$$
$$y_1=1-3-4=\boxed{-6}$$

משפט השארית: תהא f פונקציה גזירה ברציפות לפחות $N+1$ פעמים, ותהי $\{x_i\}_{i=1}^N$ קבוצה של נקודות [illegible]. אזי פולינום אינטרפולציה P_N המקיים $P_N(x_i)=f(x_i)$ מקרב את הפונקציה f עם שגיאה:

$$f(x)-P_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_N)$$

כאשר $\xi\in int(x_0,x_1,\dots,x_n,x)$ ← הקטע שנפרש ע״י x_0,x_n ו-x.

החסם של השגיאה:

$$|f(x)-P_N(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(N+1)!}\cdot|(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_N)|$$

$$M_{n+1}=\max_{\xi}|f^{(N+1)}(\xi)|$$

דוגמא: קרב את הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ בנק׳ $x=3$

בעזרת:

(1) פולינום אינט׳ עם 2 נקודות $(1,1),(4,2)$

15 (2) פולינום אינט׳ עם 3 נקודות $(1,1),(4,2),(9,3)$

השווה בין החסם לשגיאה בכל אחד מהמקרים, לשגיאה האמיתית $\boxed{\sqrt{3}=1.732}$

המש' **פתרון:**

א) פולינום 'אינט' ממעלה 1 שעובר דרך $(1,1),(4,2)$:

$$P_1(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

(ב)

$$\boxed{P_2(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}}$$

$$P_2(3) = \underline{\underline{1.7}}$$

נחשב את השגיאה במקרה זה:

$$|f(x) - P_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}\left|(x-1)(x-4)(x-9)\right|$$

$$M_3 = \max_{\xi \in [1,9]} f^{(3)}(\xi)$$

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \le \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$\Rightarrow M_3 = \frac{3}{8}$$

$$|f(x) - P_2(x)| \le \frac{\frac{3}{8}}{6}\cdot\left(2\cdot(-1)\cdot(-6)\right) = \ldots = 0.75$$

השגיאה בפועל - 0.032

והחסם: 0.75.

עבור הפולינום ממעלה 1:

$$|f(x) - P_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}\cdot|(x-1)(x-4)|$$

במקרה הזה השגיאה האמיתית היא 0.065

החסם לשגיאה $1/4$.

$$M_2 = \max_{\xi \in [1,4]} f^{(2)}(\xi)$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{4x^3} \le \frac{1}{4}$$

16

$$|P_1(x) - f(x)| \le \frac{1/4}{2!}\cdot|(3-1)(3-4)| = \boxed{\frac{1}{4}} \qquad P_1(3) = 1.6667$$