אלגברה מופשטת 2 – תרגיל כיתה 2

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

טענה

המרכז של חוג עם חילוק D הוא שדה.

הוכחה

D הוא חוג עם חילוק, ולכן קיים ב D איבר יחידה שנסמנו ב 1_D. לכל $x \in D$ מתקיים

$x = 1_D \cdot x = x \cdot 1_D$ ז"א $1_D \in Z(D)$.

מכיוון ש $Z(D)$ חוג קומוטטיבי מספיק להראות שלכל $0 \neq x \in Z(D)$ קיים $x^{-1} \in Z(D)$.

מכיוון ש D חוג עם חילוק נקבל שאם $0 \neq x \in Z(D) \subseteq D$ קיים $x^{-1} \in D$.

יהי $d \in D$

$x^{-1}d = \left(d^{-1}x\right)^{-1} = \left(xd^{-1}\right)^{-1} = dx^{-1}$ ז"א $x^{-1} \in Z(D)$.

- השוויון הראשון - D חוג עם חילוק ולכן קיים ל $d \in D$ איבר הופכי $d^{-1} \in D$. ובנוסף $\left(x^{-1}d\right)\left(d^{-1}x\right) = 1_D$.
- השוויון השני - $x \in Z(D)$ ולכן לכל $y \in D$ מתקיים $yx = xy$ ובפרט $d^{-1}x = xd^{-1}$.
- השוויון השלישי – דומה מאוד להוכחה עבור השוויון הראשון.

דוגמאות

1. הקבוצה $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\}$ היא תת חוג של $M_2(\mathbb{C})$. החוג H הוא חוג עם חילוק שאינו קומוטטיבי.
   - חוג עם חילוק - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ ובנוסף $\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = a\bar{a} + b\bar{b} = 0 \leftrightarrow a = b = 0$.
   - אינו קומוטטיבי - $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

חוג זה נקרא חוג הקווטרניונים. שימו לב שמתקיים:

- אם נסמן $k=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, i=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, 1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ אז $H=span_{\mathbb{R}}\{1,i,j,k\}$ ומתקיים $Z(H)=span_{\mathbb{R}}\{1\}\simeq\mathbb{R}$.
- $i^2=j^2=k^2=-1, i\cdot j=-j\cdot i$

2. יהי F שדה כך ש $char(F)\neq 2$, $a\in F$ כך ש $a\notin(F^*)^2$.

נסמן $K=F\left[\sqrt{a}\right]=\left\{\alpha+\beta\sqrt{a}\middle|\alpha,\beta\in F\right\}$ אז ניתן לבדוק ש K שדה.

נניח עתה שקיים $b\in F^*$ כך ש $b\neq u^2-av^2$ לכל $u,v\in F$.

(למשל $F=\mathbb{Q}$ $a=-2,b=-5$).

נסמן עבור $x=\alpha+\beta\sqrt{a}$, $\bar{x}=\alpha-\beta\sqrt{a}$ יהי $A=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ b\bar{y} & \bar{x}\end{pmatrix}\middle| x,y\in K\right\}\subset M_2(K)$.

<u>טענה</u>

A חוג עם חילוק לא קומוטטיבי.

<u>הוכחה</u>

נוכיח ש A תת חוג של $M_2(K)$. A סגור להפרש – מיידי.

נראה סגירות עבור מכפלה:

$$\begin{pmatrix}x & y\\ b\bar{y} & \bar{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & w\\ b\bar{w} & \bar{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xz+b\bar{w}y & xw+y\bar{z}\\ b\bar{y}z+\bar{x}b\bar{w} & b\bar{y}w+\bar{x}\bar{z}\end{pmatrix}\in A$$

נראה ש A לא קומוטטיבית: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ 0 & -\sqrt{a}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ 0 & -\sqrt{a}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ b & 0\end{pmatrix}$.

נוכיח שלכל איבר ב A יש הופכי. מספיק להראות שלכל $0\neq T\in A$ מתקיים $\det(T)\neq 0$.

נניח ש $\det(T)=0$ ונוכיח ש $T=0$.

$$\det\begin{pmatrix}x & y\\ b\bar{y} & \bar{x}\end{pmatrix}=x\bar{x}-by\bar{y}=0\leftrightarrow x\bar{x}=by\bar{y}.$$

אם $y=0$ אז $x\bar{x}=0\leftrightarrow\alpha^2-\beta^2a=0\leftrightarrow\alpha=\beta=0$ ולכן נקבל את מטריצת האפס.

אם $y \neq 0$ אז $b = \frac{x\bar{x}}{y\bar{y}}$ נסמן $\frac{x}{y} = u + v\sqrt{a}$ כך ש $u, v \in F$ ואז $\frac{\bar{x}}{y} = u - v\sqrt{a}$ (חישבו למה)

ז"א $b = u^2 - v^2 a$ בסתירה להנחה ש $b \neq u^2 - v^2 a$.

הגדרה

יהיו S, R חוגים נאמר כי $\varphi : R \to S$ הומומורפיזם של חוגים אם מתקיים:

- $\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$.
- $\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$.
- אם במוסף מתקיים $\varphi(1_R) = \varphi(1_S)$ נאמר שההומומופיזים יוניטרי.

דוגמאות

1. הומומורפיזם האפס: $\varphi(x) = 0$ לכל $x \in R$.
2. $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ כך שלכל $m \in \mathbb{Z}$ $\varphi(m) = m(\bmod n)$ וזאת דוגמא להומומורפיזים על.
3. יהי A תת חוג המטריצות האלכסוניות ב $M_2(R)$ ונגדיר $\varphi : A \to A$ ע"י

$$\varphi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי φ הומומורפיזם:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אבל $\varphi(1_A) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_A$

אבל עבור ההומורפיזים $\varphi : A \to \operatorname{Im}\varphi$ כאשר $\varphi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מתקיים

$$\varphi(1_A) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{\operatorname{Im}\varphi}.$$

4. $\varphi: C \to C$ המוגדר ע"י $\varphi(z)=\bar{z}$ הוא הומומורפיזים חח"ע ועל.

5. $\varphi: H \to H$ המוגדר ע"י $\varphi(a+bi+cj+dk)=a-bi-cj-dk$ הוא אנטי הומומורפיזים כי לכל $x, y \in H$ מתקיים $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ ו $\varphi(x \cdot y)=\varphi(y) \cdot \varphi(x)$.

<u>הגדרה</u>

הומומורפיזם על נקרא אפימורפיזם.

הומומורפיזם חח"ע ועל נקרא איזומורפיזם.

<u>טענה</u>

יהיו S, R חוגים עם יחידה ותהיי $\varphi: R \to S$ אפימורפיזם. אזי $\varphi(1_R)=1_S$.

<u>הוכחה</u>

φ על ולכן לכל $a \in S$ קיים $b \in R$ כך ש $\varphi(b)=a$.

$a=\varphi(b)=\varphi(b \cdot 1_R)=\varphi(b) \cdot \varphi(1_R)=a \cdot \varphi(1_R)$ קיבלנו שלכל $a \in S$ $a=a \cdot \varphi(1_R)$ ז"א $\varphi(1_R)=1_S$.

<u>תרגיל</u>

יהי $\varphi: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ הומומורפיזם כך ש $\varphi(1)=1$ אזי $\varphi:=id$.

<u>הוכחה</u>

יהי $n \in \mathbb{N}$. $\varphi(n)=\varphi\left(\overbrace{1+\ldots+1}^{n-times}\right)=\overbrace{\varphi(1)+\ldots+\varphi(1)}^{n-times}=\overbrace{1+\ldots+1}^{n-times}=n$.

לכל הומומורפיזם מתקיים $\varphi(0)=0$. ניתן להוכיח באופן הבא:

לכן $0=\varphi(1+(-1))=\varphi(1)+\varphi(-1)=1+\varphi(-1) \to -1=\varphi(-1)$

ולכן $\varphi(-n)=-n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. עבור $m \in \mathbb{N}$ נקבל

$$1=\varphi(1)=\varphi\left(m \cdot \frac{1}{m}\right)=\varphi(m) \cdot \varphi\left(\frac{1}{m}\right)=m \cdot \varphi\left(\frac{1}{m}\right) \to \frac{1}{m}=\varphi\left(\frac{1}{m}\right)$$

ולכן $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)=\varphi(n) \cdot \varphi\left(\frac{1}{m}\right)=n \cdot \frac{1}{m}=\frac{n}{m}$.

<u>הערה</u>

התרגיל הנ"ל אינו בהכרח נכון עבור שדות אחרים. למשל: $\varphi:\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]\to\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ כך ש $\varphi\left(a+b\sqrt{2}\right)=a-b\sqrt{2}$ הוא איזומורפיזם כך ש $\varphi(1)=1$ אבל $\varphi\neq id$.

<u>תרגיל</u>

יהי R חוג עם יחידה. הוכיחו ש $M_n\left(R[x]\right)\cong M_n\left(R\right)[x]$.

<u>פתרון</u>

תרגיל בית.

<u>הגדרה</u>

יהי $\varphi:R\to S$ הומומורפיזם.

נסמן את התמונה של φ ע"י $\operatorname{Im}\varphi=\left\{\varphi(x):x\in R\right\}\subset S$ תת חוג של S.

נסמן את הגרעין של φ ע"י $Ker\varphi=\left\{x\in R:\varphi(x)=0\right\}\subset R$.

נשים לב שאם $\varphi\neq 0$ אז $1_R\notin Ker\varphi$ (אם קיים 1_R) מכיוון שעבור $\varphi:R\to\operatorname{Im}\varphi$ נקבל ש $\varphi\left(1_R\right)=1_S$.

$Ker\varphi$ הוא תת מרחב חיבורית:

אם $a,b\in Ker\varphi$ אז

$\varphi(a)=\varphi(b)=0\to\varphi(a-b)=\varphi(a)-\varphi(b)=0-0=0\to a-b\in Ker\varphi$.

אם $a\in Ker\varphi, r\in R$ $\varphi(r\cdot a)=\varphi(r)\cdot\varphi(a)=0$. $r\cdot a, a\cdot r\in Ker\varphi$.

<u>הגדרה</u>

יהי R חוג, $I\subset R$ תת קבוצה. נאמר ש I אידיאל או אידיאל דו צדדי אם:

1. I תת חבורה חיבורית.
2. לכל $i\in I, r\in R$ מתקיים $i\cdot r, r\cdot i\in I$.

נסמן $I\lhd R$.

I הוא אידיאל ימני אם:

1. I תת חבורה חיבורית.
2. לכל $i\in I, r\in R$ מתקיים $i\cdot r\in I$.

I הוא אידיאל ימני אם:

1. I תת חבורה חיבורית.
2. לכל $i\in I, r\in R$ מתקיים $r\cdot i\in I$.

<u>הערה</u>

בחוג קומוטטיבי נקבל שאידיאל ימני שווה לאידיאל שמאלי שווה לאידיאל דו צדדי.

<u>דוגמאות</u>

1. לכל הומומורפיזם $\varphi: R\to S$, $Ker\varphi$ הוא אידיאל של R.
2. האידיאלים היחידים של $\mathbb{Z}$ הם מהצורה $n\mathbb{Z}$ מכיוון שלכל $m\in\mathbb{Z}, a\in n\mathbb{Z}$ קיים $b\in\mathbb{Z}$ כך ש $a=nb$ ואז $m\cdot a=m\cdot(nb)=n\cdot(mb)\in n\mathbb{Z}$.
3. יהי $x\in R$ אז הקבוצה $Rx=\{r\cdot x: r\in R\}$ היא אידיאל שמאלי. אם $a\in Rx$ אז קיים $r\in R$ כך ש $a=r\cdot x$. יהי $s\in R$ $s\cdot a=s\cdot(r\cdot x)=(s\cdot r)\cdot x\in Rx$.

דוגמה לסעיף 3

יהי $R=M_2(\mathbb{Q})$, $e_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ אז

$I=\mathrm{Re}_{12}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}: a,c\in\mathbb{Q}\right\}$ זהו אידיאל שמאלי

שאינו ימני מכיוון ש $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\notin I$.

ובאותו אופן $I=\left\{\begin{pmatrix}c&a\\0&0\end{pmatrix}: a,c\in\mathbb{Q}\right\}$ הוא אידיאל ימני שאינו שמאלי של $M_2(\mathbb{Q})$.

4. יהי $R=\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]=\left\{a+b\sqrt{5}: a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. $I:=\left\{a+b\sqrt{5}: a\in 5\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}\right\}$ אז $I\triangleleft R$.

הוכחה לסעיף 4

I תת חבורה חיבורית (חישבו למה)

$$\left(c+d\sqrt{5}\right)\left(5n+m\sqrt{5}\right)=5nc+5md+5nd\sqrt{5}+mc\sqrt{5}=5\left(nc+md\right)+\left(5nd+mc\right)\sqrt{5}\in I$$

מכיוון ש R קומוטטיבי נקבל ש $I \triangleleft R$.

5. יהי $A\subset M_n\left(R\right)$ $(n>1)$ קבוצת המטריצות המשולשיות עליונות, אז A הוא חוג עם יחידה $\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$. תהיי $I\subset A$ קבוצת המטריצות המשולשיות עליונות עם אפסים באלכסון – ז"א אם $\left(\alpha_{ij}\right)\in I$ אז לכל $1\le i\le n$ $\alpha_{ii}=0$. אז $I\triangleleft A$ (**תרגיל בית**)

__תרגיל__

יהי $A\ni e_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. הוכיחו $e_{22}A$ הוא אידיאל ימני שאינו אידיאל שמאלי.

__פתרון__

תרגיל בית.