השלמה לקבוצה של ד"ר זבאן (24/10/10 ימ')

פרטי הוכחת המשפט של $adj(A)\cdot A = A\cdot adj(A) = |A|\cdot I$:

$A\cdot adj\, A = |A|\cdot I$: נסמן $B = adj(A)$, ז"א $b_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$.

רכיב (i,i) של $A\cdot adj(A)$ הוא; מהגדרת מכפלת מטריצות:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k} a_{ik}(-1)^{k+i}|A_{ik}| = \sum_{k}(-1)^{i+k}a_{ik}|A_{ik}| \underset{\uparrow}{=} |A|$$

(פיתוח |A| לפי שורה i)

וזה בדיוק רכיב (i,i) של $|A|\cdot I$. ☑

עבור $i\neq j$, רכיב (i,j) של $A\cdot adj(A)$ הוא (מהגדרת כפל מט'):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k} a_{ik}(-1)^{k+j}|A_{jk}| = \sum_{k}(-1)^{j+k}a_{ik}|A_{jk}|$$

~~(מהמשפט על פיתוח לפי שורה, זה שווה לפיתוח)~~

זה הפיתוח לפי שורה j של המטריצה A' שכל שורותיה שוות לשורות A, פרט לשורה j שבה נכתוב שוב את שורה i של A. לכן הנ"ל $= |A'| = 0$ (כי ב A' שתי שורות שוות).
וזה שווה לרכיב (i,j) של $|A|\cdot I$. ☑

$adj(A)\cdot A = |A|\cdot I$: אפשר באופן דומה, הפעם בעזרת פיתוח דט' לפי עמודה.

לחילופין, אפשר בעזרת: $adj(A^t) = adj(A)^t$ (בדוק!).
ולהפעיל את המשוואה $A\cdot adj(A) = |A|I$ (שהוכחנו), לקבל:

$$\begin{array}{ccc} adj(A)^t\cdot A^t & = & (|A|\,I)^t \\ \| & & \| \\ adj(A^t)\cdot A^t & & |A^t|\cdot I \end{array}$$

לכן, לכל $B\in F^{n\times n}$, אם נסמן $A = B^t$, נקבל

$$\begin{array}{ccc} adj(A^t)\cdot A^t & = & |A^t|\cdot I \\ \| & & \| \\ adj(B)\cdot B & & |B|\cdot I \end{array}$$

וזה מה שרצינו להוכיח. //