תרגיל בית 2 ־ אנליזה למורים

19 בנובמבר 2016

שאלה 1

מצא את הגבול של הסדרה הבאה: $b_n = -2 \cdot n^5 + 3 \cdot n^4 - 3 \cdot n^3 + n - 2$

פתרון: נוציא את חזקה הכי גדולה של n כגורם משותף ונקבל:
$n^5 \left(-2 + \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5}\right) = -\infty$

שאלה 2

מצא את הגבול של הסדרה הבאה:

$$a_n = \sqrt{5n^6 + n^3 + n^2 + 2n} - \sqrt{5n^6 - n^3 - n^2 - 2n - 2}$$

פתרון: נכפול בצמוד את המונה ומכנה ונקבל את הביטוי הבא:
$\frac{5 \cdot n^6 + n^3 + n^2 + 2n - \left(5n^6 - n^3 - n^2 - 2n - 2\right)}{\sqrt{5n^6 + n^3 + n^2 + 2n} + \sqrt{5n^6 - n^3 - n^2 - 2n - 2}} = \frac{n^2\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(\sqrt{5 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^5}} + \sqrt{5 - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} - \frac{2}{n^6}}\right)}$
בביטוי שהתקבל אחרי שוויון אחרון הוצאנו את החזקה הכי גדולה של n כגורם משותף גם במונה וגם במכנה. עכשיו נצמצם את n^2 ונקבל $\frac{1}{n}$ כפול סדרה ששואפת ל־$\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ולכן הגבול הוא אפס.

שאלה 3

מצא את הגבול של הסדרה הבאה:

$$a_n = \sqrt[3]{3n^6 + n^4 - 2n - 1} - \sqrt[3]{3n^6 - n^4 + 2n + 3}$$

רמז: השתמשו בנוסחת כפר המקוצר הבאה: $a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

פתרון: נכפול ונחלק את a_n במספר $\left(\sqrt[3]{3n^6 + n^4 - 2n - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{\left(3n^6 + n^4 - 2n - 1\right)\left(3n^6 - n^4 + 2n + 3\right)} +$ $(*)$ $\left(\sqrt[3]{3n^6 - n^4 + 2n + 3}\right)^2$ ונקבל את ביטוי הבא:
$\frac{3n^6 + n^4 - 2n - 1 - \left(3n^6 - n^4 + 2n + 3\right)}{(*)}$. כמו בדוגמאות הקודמות נוציא מהמונה ומהמכנה את החזקה הכי גדולה של n: במונה ובמכנה זה n^4 . נצמצם את n^4 ונקבל את הביטוי ששואף ל־$3\sqrt{9}$.

שאלה 4

נחשו את הגבול של הסדרה $a_n = \frac{5n+3}{3n}$ והוכיחו שזה אכן הגבול

פתרון:
תרשום $\frac{1}{n} + \frac{5}{3} = \frac{5n+3}{3n}$ ולכן ננחש שהגבול הוא $\frac{5}{3}$, נוכיח את זה:
יהי $\epsilon > 0$, נרצה להראות שקיים $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_\epsilon$ מתקיים $|a_n - \frac{5}{3}| < \epsilon$.
$|\frac{5n+3}{3n} - \frac{5}{3}| = \frac{1}{n}$ ולכן אם מבחר $N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$ נקבל שלכל $n > N_\epsilon$ $\frac{1}{n} < \epsilon$ ומשום ש־ϵ היה שרירותי זה נכון לכל $\epsilon > 0$ וזה מסיים את ההוכחה.

שאלה 5

תהי a_n סדרה המקיימת $a_n \to 0$ ותהי b_n סדרה שאין לה גבול (לא סופי ולא אינסופי).

הוכיחו באמצעות דוגמאות שלא ניתן לומר כלום על הגבול של סדרה $a_n \cdot b_n$:

הדרכה:

1) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n המקיימות את הנתונים שעבורן $a_n \cdot b_n \to 0$

פתרון: נבחר $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$b_n = (-1)^n$

2) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_nהמקיימות את הנתונים שעבורן $a_n \cdot b_n \to 1$

פתרון: $a_n \frac{(-1)^n}{n}$ ו־$b_n = (-1)^n \cdot n$

3) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n המקיימות את הנתונים שעבורן אין גבול ל־$a_n \cdot b_n$

פתרון: $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$b_n = (-1)^n \cdot n$