<u>תבניות (שיעור 2)</u>:

על מנת להסביר את המוטיבציה מאחורי התבניות, נבין את הדוגמה הבא:

נניח שאנו רוצים לחשב את שטח הפנים של הפונקציה $f(x,y)=5x^2-9\sin(3y)$. אז הגרף של הפונקציה נמצא ב$\mathbb{R}^3$, אך ניתן לראות כי אין לו נפח ולכן לא נוכל לבצע אינטגרציה ב$\mathbb{R}^3$.

אחת הדרכים לפתור את הבעיה הזו היא לחלק את מישור x,y לריבועים קטנים $\mathrm{r_i}$ ולהסתכל על הצמצום של $R_i = \left(x,y,f(x,y)\right)|_{x,y\in r_i}$, על הריבוע r_i. עבור r_i עם שטח קטן מאוד נקבל שR_i הינו מקבילון קטן. נסמן את היחס $\frac{\mathrm{R_i}}{r_i} = g_i$. ואז $S=\int g(x,y)dxdy$ כאשר $g(x,y)$ מסמן באופן אינטואיטבי את יחס המקבילון לריבוע בנקודה (x,y).
כלומר, על מנת למצוא את השטח S עלינו לדעת מהי הפונקציה g(x,y).

אנו נראה בהמשך כי תבניות דיפרנציאליות נותנות לנו למעשה את $g(x,y)$.

<u>תזכורת</u>: פונקציה מולטילינארית $(\mathbb{R}^n)^k$ היא פונקציה $M:(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}$ אשר לינארית בכל אחד מרכיביה . כלומר: $M(a_1,a_2,\dots,a_i+ca',\dots,a_k)=M(a_1,\dots,a_i,\dots,a_k)+cM(a_1,\dots,a',\dots,a_k)$ לכלל $1\le i\le k$ כאשר $c\in\mathbb{R}$ ו$a_i\in\mathbb{R}^n$.

דוגמה: מכפלה פנימית ב$\mathbb{R}^n$ מוגדרת $<u,v>:(\mathbb{R}^n)^2\to\mathbb{R}$ הינה פונקציה מולטילינארית וכן מתקיים תמיד כי $<v+cw,u>=<v,u>+c<v,w>$. וגם $<u,v+cw>=<u,v>+<u,cw>$.

<u>הגדרה</u>: פונקציה מולטיליניארית תקרא מתחלפת (alternating) אם בנוסף $M(a_1,a_2,\dots,a_k)=0$ כאשר $a_i=a_j$ ניתן להראות כי מתקיימות התכונות הבאות:

1. $M(a_1,\dots,a_k)=0$ כאשר הוקטורים הם ת״ל.
2. $M\left(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_k\right)=-M(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_k)$ חילוף של שני וקטורים גורם להפיכת סימן.

נסמן ב$i=(i_1,\dots,i_k)$ כך ש$1\le i_r\le n$ נגדיר את הפונקציה הבאה: $dx_i(a_1,\dots,a_k)=\begin{vmatrix} a^1_{i_1} & \dots & a^k_{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^1_{i_k} & \dots & a^k_{i_k}\end{vmatrix}$. כלומר הדטרמיננה של המטריצה A המתקבלת מסידור השורות עם האינדקס שבi של המטריצה $(a^i,\dots,a^k)$ (מחיקת כל השורות שאינן נמצאות בi)

דוגמה: חשב את $dx_i\begin{pmatrix}1,6\\3,3\\6,8\\0,5\end{pmatrix}$ כאשר:

א. I=(3,4)
ב. I=(4,3)

פתרון:

א. נבנה את המטריצה המתאימה: $A=\begin{pmatrix}6,8\\0,5\end{pmatrix}$ נעשה דטרמיננטה ונקבל 30.
ב. נבנה את המטריצה המתאימה: $A=\begin{pmatrix}0,5\\6,8\end{pmatrix}$ והדטרמיננטה תהיה ‎-30.

ניתן לראות כי dx_i הינה פונקציה מולטיליניארית על $(\mathbb{R}^n)^k$.

<u>הערה</u>: ניתן להראות כי פונקציית הדטרמיננטה הינה הפונקציה ה k מולטיליניארית היחידה שמקיימת $M\left(e^1,\dots,e^k\right)=1$ כאשר e^i וקטור אשר מקבל 1 ברכיב i ו0 בשאר הרכיבים. ניתן לראות כי $M=dx_i$.

כאשר $1\le i\le n$ נקבל כי M הינו למעשה ההיטל של הוקטור על ציר x_i.

ולמעשה : $M(v)=\left((dx_i(v)^2)\right)^{\frac{1}{2}}$.

ע"פ משפט פיתגורס נקבל $|v|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(dx_i(v)\right)^2}$.

ניתן להרחיב תוצאה זו בצורה כללית יותר . נסתכל על המקבילון הk מימדי הנוצר מהוקטורים $a^1,\dots,a^k$ ונסמן את הנפח שלו בV. מתקיים כי $V=\sqrt{\sum_i\left(\left(dx_i(a^1,\dots,a^k)\right)^2\right)}$. כלומר, אנחנו סומכים את ריבועי ההיטלים של המקבילון על כל אחד מהמישורים הk מימדים השונים.

דוגמה : מצא את נפח המקבילון מהוקטורים $a^1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},a^2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

פתרון : ריבוע שטח היטל המקבילון על ציר x,y הוא $1=\left(\det\begin{pmatrix}2,1\\1,1\end{pmatrix}\right)^2=dx_{1,2}(a^1,a^2)^2$.

ריבוע שטח היטל המקבילון על ציר x,z הוא $4=\left(\det\begin{pmatrix}2,1\\2,0\end{pmatrix}\right)^2$.

ואחרון, ריבוע שטח היטל המקבילון על ציר y,z הוא $4=\left(\det\begin{pmatrix}1,1\\2,0\end{pmatrix}\right)^2$.

נקבל כי שטח המקבילון, הוא $\sqrt{33}=\sqrt{1^2+4^2+4^2}$.