משפט הפירוק הפרימרי

הגדרה. תהא $T:V\to V$ ה"ל אזי

1. אם $Tv=\lambda v$ עבור $v\neq 0$ אזי v ו"ע ו λ ע"ע.
2. המרחב העצמי של λ ע"ע הוא $V_\lambda=\{v\in V:Tv=\lambda v\}$
3. הפ"א של T (מסומן p_T) מוגדר להיות הפ"א של מטריצה מייצגת $[T]_B^B$ (עבור B בסיס כלשהוא. משפט: כל בסיס יתן אותו פ"א)
4. הצבה של T הפולינום כלשהוא $p(x)=\sum_{i=0}^m a_ix^i$ היא ה"ל $p(T):V\to V$ המוגדרת $\sum_{i=0}^m a_iT^i$ כאשר $T^0=I$ הזהות.
5. הפולינום המינמאלי של T , m_T הוא הפולינום עם דרגה מיני' ששונה מאפס כשמציבים בו את T מקבלים 0.

משפט.

1. λ ע"ע של T אמ"מ λ ע"ע של $[T]_B^B$ (כלומר שורש של הפ"א של T)
2. v ו"ע של T אמ"מ $[v]_B$ ו"ע של $[T]_B^B$.
3. מתקיים כי $p_T(T)=0$
4. מתקיים כי m_T מחלק כל פולינום $p(x)$ המקיים $p(T)=0$. בפרט m_T מחלק את p_T ובנוסף יש להם אותם גורמים אי פריקים.

מרחב T-אינווריאנטים

הגדרה. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, תת מרחב W של V נקרא אינווריאנטי (שמור) אם $T(W)\subseteq W$ או במילים אחרות

$$\forall w\in W:Tw\in W$$

שימו לב כי אם W T אינוואריאנטי ניתן להתסכל על ה"ל המצומצמת

$$T_{|W}:w\to W$$

תרגיל: נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י

משפט. משפט הפירוק הפרימרי:

תהא $T:V\to V$ ה"ל ויהא $m_T=\prod_i p_i^{r_i}$ כאשר p_i הגורמים האי פריקים, נגדיר $W_i=\ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$. אזי

1. לכל i התת"מ W_i הוא T- אינוואריאנטי.

2. מתקיים כי $V=\oplus_i W_i$.

3. אם B_i בסיס ל W_i ו $B=\cup_i B_i$ אזי $[T]_B^B=\oplus_i[T_{|W_i}]_{B_i}$.

דוגמה 1. תהיה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\x+y\\2z\\3w\end{pmatrix}$

הצג את $\mathbb{R}^4$ כסכום ישר של תתי מרחבים אינוואריאנטים ביחס ל-T.

פתרון. ראשית נמצא את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי שהיא

$$[T]_S^S=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

כעת נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה שהוא גם הפולינום האופייני של העתקה

$$p_T(x)=(x-2)^2(x-1)(x-3)$$

לכן הפולינום המינימלי יכול להיות

$$m_T(x)=(x-2)^2(x-1)(x-3)$$

או

$$m_T(x)=(x-2)(x-1)(x-3)$$

אחרי הצבה של $[T]_S^S$ נקבל שהפולינום המינימלי הוא

$$m_T(x)=(x-2)(x-1)(x-3)$$

כלומר לפי המשפט הפירוק פרימרי מתקיים

$$\mathbb{R}^4=\operatorname{Ker}(T-2I)\oplus\operatorname{Ker}(T-I)\oplus\operatorname{Ker}(T-3I)$$

נמצא את תתי המרחבים הללו

$$\operatorname{Ker}(T-2I)=N\left([T-2I]_S^S\right)=N\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\operatorname{Ker}(T-I)=N\left([T-I]_S^S\right)=N\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ו-

$$\operatorname{Ker}(T-3I)=N\left([T-3I]_S^S\right)=N\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לכן

$$\mathbb{R}^4=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\oplus Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\oplus Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

דוגמה 2. מצא את הפירוק פרימרי ל-$\mathbb{R}_2[x]$ תחת ההעתקה $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0-a_2)+(a_0+a_1-a_2)\,x$$

פתרון. נשתמש בבסיס $S=\left\{1,x,x^2\right\}$ ונחשב $[T]_S^S$:

$$A=[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת הפ"א

$$p_T(\lambda)=(\lambda-1)^2\,\lambda$$

והפולינום המינימלי הוא

$$m_T(x)=x(x-1)^2$$

אזי :

$$W_1=\ker T=\mathrm{N}([T]_S^S)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=Span\left\{1+x^2\right\}$$

$$W_2=\ker(T-I)^2=\mathrm{N}\left(\left([T]_S^S-I\right)^2\right)=\mathrm{N}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Span}\left\{1,x\right\}$$

מקיימים

$$V=\mathbb{R}_2\left[x\right]=W_1\oplus W_2$$

ונשים לב כי

$$T_{|W_1}:span\left\{1+x^2\right\}\to span\left\{1+x^2\right\}$$
$$T_{|W_2}:span\left\{1,x\right\}\to span\left\{1,x\right\}$$

מוגדרת ומתקיים כי

$$\left[T_{|W_1}\right]_{B_1}=(0)\,,\left[T_{|W_2}\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

עבור

$$B_1=\left\{1+x^2\right\},B_2=\left\{1,x\right\}$$

ועבור

$$B=B_1\cup B_2=\left\{1+x^2,1,x\right\}$$

מתקיים כי

$$[T]_B=\left(\begin{array}{c|cc}0&0&0\\\hline 0&1&0\\0&1&1\end{array}\right)=(0)\oplus\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

דוגמה 3. תהיה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\2x+y\\2z+w\\2w+k\\3k\end{pmatrix}$$

הצג את $\mathbb{R}^5$ כסכום ישר של תתי מרחבים אינווריאנטים ביחס ל-T.

פתרון. ראשית נמצא את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי שהיא

$$[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

כעת נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה שהוא גם הפולינום האופייני של העתקה

$$p_T(\lambda)=\left(\lambda I-[T]_S^S\right)=\left((\lambda-1)^2-4\right)(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)=(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$$

הפולינום המינימלי יכול להיות אחד מהבאים

$$\begin{cases}m_T(\lambda)&=&(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)\\m_T(\lambda)&=&(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2\\m_T(\lambda)&=&(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)\\m_T(\lambda)&=&(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2\end{cases}$$

בעזרת הצבה של המטריצה $[T]_S^S$ בפולינומים ניתן למצוא שהפולינום המינימלי הינו

$$m_T(\lambda)\quad=\quad(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

כעת לפי המשפט יש למצוא את הגרעינים של הגורמים הללו

$$\begin{aligned}W_1&=\ker\left(p_1^{r_1}(T)\right)=\\&=\ker(T+I)=\\&=\mathrm{N}\begin{pmatrix}2&2&0&0&0\\2&2&0&0&0\\0&0&3&1&0\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 &= \ker\left(p_2^{r_2}(T)\right) = \\ &= \ker\left((T-2I)^2\right) = \\ &= \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2\right) = \\ &= \mathrm{N}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned} W_3 &= \ker\left(p_3^{r_3}(T)\right) = \\ &= \ker(T-3I) = \\ &= \mathrm{N}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

כלומר לפי המשפט מתקיים

$$\mathbb{R}^5 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \oplus \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \oplus \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

כאשר כל אחד והתתי המרחבים הללו הוא מרחב אינוו ביחס ל-T