

בוחר אלגברה לינארית למהנדסים

12.1.2015, כ"א טבת תשע"ה

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- כיתבו כל תשובה בדף של השאלה. על כל דף רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

מבנה הבחינה:

שאלה 1 - 8 שאלות נכון/לא נכון. 5 נקודות לכל שאלה (סה"כ $5 \times 8 = 40$ נקודות)
שאלה 2+3 - שאלות פתוחות. כל שאלה 30 נקודות.

הערה: הסימון $N(A), C(A), R(A)$ מסמנים את מרחב השורות, עמודות, האפס של A בהתאמה.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

חלק א' - שאלות נכון/לא נכון (ללא נימוק, כל סעיף 5 נקודות)

סמן נכון או לא נכון

1. נגדיר

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \wedge x + 2y = z \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

טענה: W תת מרחב של \mathbb{R}^3
נכון/ לא נכון

2. נגדיר

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x_1 = -x_2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

טענה: W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$
נכון/ לא נכון

3. נגדיר

$$W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{trace}(A) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$$

טענה: W תת מרחב של $\mathbb{R}^{n \times n}$
נכון/ לא נכון

4. יהא V מ"ו. תהא S קבוצה פורשת של V . אזי בהכרח $0 \notin S$
נכון/ לא נכון

5. יהא V מ"ו. תהא $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה פורשת של V . אזי בהכרח $S' = \{v_1, v_2, v_1 + v_3\}$ גם כן קבוצה פורשת את V
נכון/ לא נכון

6. יהא V מ"ו. תהא $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה בת"ל. נגדיר

$$w_1 = v_1 + 2v_2 - v_3$$

$$w_2 = v_2 - v_3$$

$$w_3 = v_1 + v_2$$

טענה: בהכרח $\{w_1, w_2, w_3\}$ גם כן בת"ל
נכון/ לא נכון

7. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי

$$C(A) = \{0\} \Rightarrow A = 0$$

נכון/ לא נכון

8. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי

$$N(A) = \{0\} \Rightarrow A = 0$$

נכון/ לא נכון

חלק ב' - שאלות פתוחות והוכחות

$$1. \text{ תהא } A \in \mathbb{R}^{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) (20 נקודות) מצא מימד ובסיס של $C(A), R(A), N(A)$

(ב) (15 נקודות) נגדיר את הקבוצה

$$W = \{B \in \mathbb{R}^{4 \times 5} \mid R_1(BA) = (0, 0, 0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 5}$$

הוכח כי W תת מרחב של $\mathbb{R}^{4 \times 5}$ ומצא את המימד שלו (הערה: הסימון $R_1(BA)$ פירושו השורה הראשונה של BA , המטריצה A היא המטריצה מסעיף קודם)

2. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכח כי

$$(א) \text{ (10 נקודות) } C(A^2) \subseteq C(A) \text{ וגם } N(A) \subseteq N(A^2)$$

(ב) (15 נקודות) $C(A^2) = C(A) \iff N(A^2) = N(A)$ (הסעיפים..)