מד"ר - תרגול 3

7 באוגוסט 2011

הודעה

השיעור של יום שלישי מבוטל, ביום חמישי שיעור באותה כיתה, הגשת תרגיל 1 ליום חמישי או ליום ראשון.
שאלה 5 ה' היא לא חובה בתרגיל 1, מי שעושה יקבל 5 נק' בונוס.

הורדת סדר משוואה

נתונה משוואה מהצורה

$$F\left(y^{'},\, y,\, x\right) = 0$$

או

$$F\left(y^{''},\, y^{'},\, y,\, x\right)$$

נתחיל במקרים מיוחדים של הסוג הראשון.
נסמן $y^{'} = p$ ונקבל משוואה:

$$F\left(y,\, p,\, x\right) = 0$$

נחלק למקרים:

מקרה א'

פתירה עבור p: ננסה להציג את המשוואה בצורת מכפלה:

$$\left(p - F_1\right)\left(p - F_2\right) \ldots \left(p - F_n\right) = 0$$

פותרים כל מכפלה בנפרד, והפתרון הוא המכפלה

$$f_1\left(x,\, y,\, c\right) \cdot \ldots \cdot f_n\left(x,\, y,\, c\right)$$

כאשר $f_i = y - g_i\left(x,\, c\right)$ ו-g_i פתרון של $p - F_i = 0$.

דוגמה 1

פתור את המשוואה

$$p^4 - \left(x + 2y + 1\right) \cdot p^3 + \left(x + 2y + 2xy\right) p^2 - 2xyp = 0$$

נתון פולינום כאשר $p=y^{'}$.
ננסה לרשום את המשוואה כמכפלה

$$\left(p-F_1\right)\left(p-F_2\right)\left(p-F_3\right)\left(p-F_4\right)=0$$

כאשר $F_1,\,..,\,F_4$ שורשי הפולינום.
נוציא גורם משותף p:

$$p\left(p^3-\left(x+2y+1\right)p^2+\left(x+2y+2xy\right)p-2xy\right)=0$$

קל לראות ש1 הוא פתרון, אז נשתמש בחילוק פולינומים ב$p-1$ ונקבל:

$$p\left(p-1\right)\left(p-x\right)\left(p-2y\right)=0$$

נפתור כל גורם בנפרד:

$$\begin{array}{cccc} p=0 & p=1 & p=x & p=2y \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ f_1=c_1 & f_2=x+c_2 & f_3=\frac{x^2}{2}+c_3 & f_4=e^{2x}+c_4 \end{array}$$

לכן הפונקציה הפרימיטיבית של המשוואה הדיפרנציאלית היא

$$\left(y-c\right)\left(y-x-c\right)\left(2y-x^2+c\right)\left(y-ce^{2x}\right)=0$$

מקרה ב'

אם נתונה משוואה מהצורה

$$y=f\left(x,\,p\right)$$

נגזור את המשוואה ביחס לx:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

פותרים עבור $p=F\left(x,\,p,\,p^{'}\right)$ ומשתמשים חזרה במשוואה המקורית כדי לפתור.

מקרה ג'

נתון

$$x=f\left(y,\,p\right)$$

גוזרים ביחס לy וממשיכים באופן דומה לסעיף ב'.

מקרה ד'

משוואת קלרו:

$$y=px+f\left(p\right)$$

אז הפתרון הכללי הוא

$$y=cx+f\left(c\right)$$

דוגמה 2

פתור:

$$16x^2+2\left(y^{'}\right)^2y-\left(y^{'}\right)^3x=0$$

פתרון

<u>מטרה:</u> להוריד את סדר הנגזרות (לא מצאנו שיטה שפותרת את זה).

נסמן $y^{'}=p$ ונקבל:

$$16x^2+2p^2y-p^3x=0$$

ניתן לרשום את המשוואה באופן הבא:

$$2y=px-16\frac{x^2}{p^2}$$

אם נגזור את המשוואה האחרונה לפי x נקבל:

$$2p=p+p^{'}x-\frac{32xp^2-32p\cdot p^{'}\cdot x^2}{p^4}$$

נקבל:

$$\begin{aligned}
p &= x\cdot p^{'}-\frac{32x}{p^2}+\frac{32p^{'}x^2}{p^3}\\
p &= \left(x+\frac{32x^2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx}-\frac{32x}{p^2}\\
p^4 &= \left(p^3x+32x^2\right)\frac{dp}{dx}-32xp\\
0 &= p\left(p^3+32x\right)-x\left(p^3+32x\right)\frac{dp}{dx}\\
0 &= \left(p-x\frac{dp}{dx}\right)\left(p^3+32x\right)
\end{aligned}$$

משוואה זו מתקיימת בשני מקרים:

.1

$$\begin{aligned}
x\frac{dp}{dx} &= p\\
\frac{dp}{p} &= \frac{dx}{x}\\
p &= cx
\end{aligned}$$

כאשר נציב במשוואה המקורית נקבל

$$\begin{aligned}
16x^2+2c^2x^2y-c^3x^4 &= 0\\
y &= \frac{c^3x^2-16}{2c^2}\\
&= \frac{cx^2}{2}-\frac{8}{c^2}
\end{aligned}$$

2. <u>הערה</u>:
בגורם $p^3+32x=0$ איננו מתחשבים היות ואינו מכיל את הנגזרת $\frac{dp}{dx}$.
זכרו שמחפשים $F\left(x,\,p,\,p^{'}\right)$.
לגבי משמעויות, זה מעבר למטרות הקורס.

דוגמה 3

פתור

$$y=\left(2+p\right)x+p^2$$

פתרון

נתחיל בגזירה לפי x (מפריע לנו p^2).

$$\begin{aligned} p &= 2+p^{'}x+p+2p\cdot p^{'} \\ 0 &= 2+p^{'}x+2p\cdot p^{'} \\ -2 &= \left(x+2p\right)\frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

המשוואה הנתונה היא משוואה לינארית.
ננסה להשתמש בשיטות ידועות.
נמצא גורם אינטגרציה:

$$u\left(p\right)=\frac{M_p-N_x}{M}=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ולכן גורם האינטגרציה שלנו הוא $e^{\frac{1}{2}p}$.
נכפול את המשוואה:

$$2e^{0.5p}dx+\left(2xe^{0.5p}+4pe^{0.5p}\right)dp=0$$

המשוואה מדוייקת עכשיו.
נמצא g כך שמתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2e^{0.5p} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \left(2xe^{0.5p}+4pe^{0.5p}\right) \end{aligned}$$

לאחר חישוב נקבל שהפתרון הסופי הוא

$$\begin{cases} y &= 8-p^2+\left(2+p\right)ce^{-\frac{1}{2}p} \\ x &= 2\left(2-p\right)+ce^{-\frac{1}{2}}p \end{cases}$$

דרך נוספת לפתרון המשוואה - הצבת $z=x+2p$.

דוגמה 4

פתור

$$y=3px+6p^2y^2$$

פתרון

נחלק את כל המשוואה בp, נקבל:

$$\frac{y}{p} = 3x + 6py^2$$

נסדר את המשוואה בצורה

$$\begin{aligned} x &= f(y,p) \\ 3x &= \frac{y}{p} - 6py^2 \end{aligned}$$

נגזור את המשוואה לפי y:

$$\begin{aligned} \frac{3}{p} &= \frac{p - \frac{dp}{dy}\cdot y}{p^2} - 12py - 6y^2\frac{dp}{dy} \\ \frac{3}{p} &= \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\cdot\frac{dp}{dy} - 6y^2\frac{dp}{dy} - 12py \\ 3p &= p - y\frac{dp}{dy} - 6p^2y^2\frac{dp}{dy} - 12p^3y \\ 0 &= 2p + y\frac{dp}{dy} + 6p^2y^2 + 12p^3y \\ 0 &= 2p\left(1+6p^2y\right) + y\frac{dp}{dy}\left(1+6p^2y\right) \\ 0 &= \left(2p + y\frac{dp}{dy}\right)\left(1+6p^2y\right) \end{aligned}$$

בגורם $1+6p^2y$ לא מופיע $\frac{dp}{dy}$ לכן נתעלם ממנו, ולכן נפתור רק את הגורם:

$$\begin{aligned} y\frac{dp}{dy} + 2p &= 0 \\ \frac{dp}{2p} &= -\frac{dy}{y} \\ p &= \frac{1}{y^2}c \end{aligned}$$

נשאר להציב במד"ר המקורית ונקבל את הפתרון:

$$y^3 = 3cx + 6c^2$$

דוגמה 5

פתור:

$$\begin{aligned} (y-px)^2 &= 1+p^2 \\ y - px &= \pm\sqrt{1+p^2} \\ y &= px \pm \sqrt{1+p^2} \end{aligned}$$

זו משוואת קלרו, אצלנו:

$$f(p) = \pm\sqrt{1+p^2}$$

ולכן הפתרון הוא:-

$$y = cx \pm \sqrt{1+c^2}$$

והפתרון הסינגולרי הוא:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{df}{dp}(p) = \mp\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y &= \mp\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} \pm \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}$$