פתרון תרגיל בית מספר 2

שאלה 1

א. נוכיח שלכל $x \in X$, $\{x\}$ היא קבוצה סגורה בשתי דרכים:

<u>דרך סדרות</u>- קבוצה סגורה במ"מ אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. ברור שהסדרה היחידה שמוכלת ב-$\{x\}$ היא הסדרה הקבועה שגבולה הוא, כמובן, $x \in \{x\}$.

<u>דרך נוספת</u> - נראה ש $X \setminus \{x\}$ פתוחה. תהי $y \in X \setminus \{x\}$. יהי $\varepsilon = d(x,y)$. ברור ש $\varepsilon > 0$ כי $x \neq y$. נראה שמתקיים $B(y,\varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$. אם $z \in B(y,\varepsilon)$ אזי $\varepsilon > d(z,y)$. לכן, $z \neq x$ (כי $\varepsilon = d(x,y)$). מכאן $z \in X \setminus \{x\}$ וקיבלנו הדרוש.

ב. נניח ש-A תת קבוצה סופית של X. אם $A = \emptyset$ ברור ש A סגורה. אחרת, תהי $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ($n \geq 1$). מתקיים $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$. עפ"י סעיף א' לכל $1 \leq i \leq n$ $\{x_i\}$ סגורה. מכיון שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה נקבל ש A סגורה.

שאלה 2

נניח $\{x_n\} \subseteq B[a,r]$ $x_n \to x$ ונניח בשלילה ש $x \notin B[a,r]$. מכיון ש $x \notin B[a,r]$ אזי $d(x,a) > r$ לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $d(x,a) = r + \varepsilon$. $x_n \to x$ ולכן לכל $\varepsilon' > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon' = \varepsilon$ קיים n_0 טבעי כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n, x) < \varepsilon$.

לכן $d(x_{n_0}, x) < \varepsilon$ ומכיון ש$\{x_n\} \subseteq B[a,r]$ נקבל ש $d(x_{n_0}, a) \leq r$ ולכן מאי שויון המשולש נקבל $d(x,a) \leq d(x_{n_0}, x) + d(x_{n_0}, a) < r + \varepsilon$ בסתירה לכך ש $d(x,a) = r + \varepsilon$.

דרך אחרת (שימוש בכלים מאינפי1): נראה שאם $x_n \to x$ כאשר $\{x_n\} \subseteq B[a,r]$ אז $x \in B[a,r]$.
מתקיים: $0 \leq d(x_n, a) \leq r$ זוהי סדרת מספרים חסומה ב $\mathbb{R}$ עפ"י בולצנו ויישטראס קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ כך ש $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, a)$ קיים. יתרה מכך מכיון ש $d(x_n, a) \leq r$ נסיק $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, a) \leq r$.

נתון $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ לכן $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, x) = 0$.

כעת, לכל k מתקיים $d(x,a) \leq d(x, x_{n_k}) + d(a, x_{n_k})$ מכאן
$d(x,a) \leq \lim_{k \to \infty} \left(d(x, x_{n_k}) + d(a, x_{n_k}) \right) = \lim_{k \to \infty} d(x, x_{n_k}) + \lim_{k \to \infty} d(a, x_{n_k}) \leq r$.

שאלה 3

א. 1. $x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow \tilde{d}(x,y)=0$.

2.מהסימטריות של המטריקה d נקבל $\tilde{d}(y,x)=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\tilde{d}(x,y)$

לכל $x,y\in X$.

3. א. על מנת להוכיח אי שוויון המשולש של מטריקה $\tilde{d}$ יש להראות את אי השוויון

$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \le \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$ לכל $x,y,z\in X$.

<u>שלב א</u>: אם $0\le a,b$ ו- $a\le b$ אזי $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}$.

הוכחה: אכן,

$\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b} \Leftrightarrow a(1+b)\le b(1+a) \Leftrightarrow a+ab\le b+ab \Leftrightarrow a\le b$.

<u>שלב ב</u>: אם $0\le a,b,c$ ו- $a\le b+c$ אזי $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$.

הוכחה: אכן, $\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \ge \frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+c}=\frac{b+c}{1+b+c} \underset{stage\ a}{\ge} \frac{a}{1+a}$.

<u>שלב ג</u>: בצעו את ההצבה המתאימה על מנת להשלים את ההוכחה.

ב. $\tilde{d}(x,y)<1$

ג. נניח $\{x_n\}\xrightarrow{d}x$. נקבל

$\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}=\frac{0}{1+0}=0\Rightarrow\{x_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}x$.

מצד שני $d(x,y)=\frac{\tilde{d}(x,y)}{1-\tilde{d}(x,y)}$. לכן אם $\{y_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}y$ נקבל

$\lim_{n\to\infty}d(y_n,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{d}(y_n,y)}{1-\tilde{d}(y_n,y)}=\frac{0}{1-0}=0\Rightarrow\{y_n\}\xrightarrow{d}y$.

לכן המטריקות שקולות.

<u>שאלה 4</u>

א. $k(a^n,0)=\max\{i:\ a^i\mid(a^n-0)\}=n\Rightarrow d_a(a^n,0)=\frac{1}{a^n}\underset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow a^n\xrightarrow{d_a}0$

ב. עפ"י א' $\{7^n\}\xrightarrow{d_7}0$ אבל $\{7^n\}\overset{d_5}{\not\to}0$ שכן $d_5(7^n,0)=1\underset{n\to\infty}{\not\to}0$. מכאן ש d_5 ו- d_7 אינן שקולות.

ג. בתרגיל 1 (שאלה 5) הוכחתם כי במ"מ דיסקרטי הסדרות היחידות המתכנסות הן אלה שקבועות לבסוף. עפ"י סעיף א׳ $\{8^n\}$ סדרה שאינה קבועה לבסוף המתכנסת מעל $\mathbb{Z}$ לפי

המטריקה d_8 . מכאן , d_8 לא שקולה למטריקה הדיסקרטית מעל $\mathbb{Z}$. נוכיח שהמטריקה הסטנדרטית שקולה לדיסקרטית (ולכן לא שקולה ל d_8) מעל $\mathbb{Z}$. מ"ל שכל סדרה המתכנסת ב מ"מ $(\mathbb{Z},|\ |)$ קבועה לבסוף. נניח ש $x_n \to x$ אזי ניקח $\varepsilon = 1$ ומתקיים שקיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $d(x_n, x) < 1$. מכאן בהכרח (המרחק המינימלי בין נקודות שונות של $\mathbb{Z}$ הוא 1), לכל $n \geq n_0$ $x_n = x$ והוכחנו הדרוש.

<u>שאלה 5</u>

א. תהי U פתוחה ב-(Y,ρ_2) . מכיון ש ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל Y נקבל U פתוחה ב-(Y,ρ_1) . $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה וכן U פתוחה ב-(Y,ρ_1) ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה ב(X,d_1). d_1,d_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל X ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה גם ב (X,d_2).
קיבלנו שלכל U פתוחה ב-(Y,ρ_2) $f^{-1}(U)$ פתוחה ב (X,d_2) ומכאן $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

ב. הפרכה ע"י דוגמא נגדית ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, d_1 מטריקה דיסקרטית , $d_2=\rho_1=\rho_2$ מטריקה סטנדרטית ב- $\mathbb{R}$ (מטריקה המושרית מערך מוחלט). נקבל שכל פונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ היא רציפה מכיון שכל תת קבוצה ב (X,d_1) היא פתוחה (למה?) אבל ניתן למצוא f כך ש $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ אינה רציפה, למשל,

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq 0 \\ 5 & x=0 \end{cases}.$$

<u>שאלת בונוס</u>

א. קל להוכיח הדרוש באמצעות משפט הסנדביץ' והעובדה שלכל מטריקה μ מעל X מתקיים $x_n \xrightarrow{\mu} x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\mu(x_n,x)=0$.

ב. ראינו ב4 ג' שתי מטריקות שקולות מעל $\mathbb{Z}$. המטריקה הסטנדרטית המושרית מ $\mathbb{R}$ וכן מטריקת 0-1 (המטריקה הדיסקרטית). הן אינן שקולות במובן ליפשיץ שכן אחרת קיים $c>0$ כך ש $\forall x,y\in\mathbb{Z}\quad cd_\Delta(x,y)\geq |x-y|$.
בפרט, $\forall x\neq y\in\mathbb{Z}\quad c=c\cdot 1=cd_\Delta(x,y)\geq|x-y|$. זה כמובן לא יתכן (מדוע?) ולכן קיבלנו סתירה. כלומר המטריקות אינן שקולות במובן ליפשיץ.