שיעור 5

האינטגרל הלא מסויים

הגדרה

פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ בתחום D, אם עבור כל x בתחום D מתקיים $F'(x)=f(x)$.

הערה

אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז גם $F(x)+c$, כאשר c מספר קבוע, היא פונקציה קדומה של $f(x)$ מכיוון ש $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$. קיבלנו שלפונקציה $f(x)$ יש אינסוף פונקציות קדומות.

דוגמא

הפונקציה $F(x)=x^2$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$ מכיוון ש $F'(x)=f(x)$.

הפונקציה $F(x)=x^2+1$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$ מכיוון ש $F'(x)=f(x)$.

באופן כללי הפונקציה $F(x)=x^2+c$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=2x$ מכיוון ש $F'(x)=f(x)$.

הגדרה

תהי $f(x)$ בעלת פונקציה קדומה $F(x)$. אוסף כל הפונקציות הקדומות $F(x)+C$ של $f(x)$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$, אותו נסמן $\int f(x)dx=F(x)+c$.

תכונות האינטגרל הלא מסוים

1. אם $f(x)$ גזירה אזי $\int f'(x)dx=f(x)+c$.
2. לכל קבוע a מתקיים $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.
3. האינטגרל של הסכום (או ההפרש) של שתי פונקציות שווה לסכום (או הפרש) האינטגרלים $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

אינטגרלים מיידים

1. $\int (ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c$ כאשר $n\neq -1$.

דוגמא: $\int (3x+2)^3 dx=\frac{(3x+2)^4}{3\cdot 4}=\frac{(3x+2)^4}{12}$.

2. $\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{\ln|ax+b|}{a}+c$.

דוגמא: $\int \frac{1}{5x+2}dx=\frac{\ln|5x+2|}{5}+c$.

3. $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$ כאשר $a>0, a\neq 1$.

דוגמא: $\int 2^{4x+1}dx=\frac{2^{4x+1}}{4\ln 2}+c$.

4. $\int \sin(ax+b)dx=\frac{-\cos(ax+b)}{a}+c$, $\int \cos(ax+b)dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+c$.

דוגמא: $\int \sin(3x+\pi)dx = \frac{-\cos(3x+\pi)}{3}+c$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{tgx}{a}+c$, $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{ctgx}{a}+c$.

6. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+c$.

<u>חישוב אינטגרלים בעזרת האינטגרלים המיידים</u>

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sin^2 xdx$ ב. $\int \left(1+\sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx$ ג. $\int \frac{2x^3+x^2+1}{x^3}dx$ ד. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

<u>פתרון</u>

א. נשתמש בזהות $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\int \sin^2 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} = \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x .$$

ב.

$$\int \left(1+\sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx = \int \left(1+x^{\frac{5}{4}}\right)^2 dx = \int \left(1+2x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{10}{4}}\right)dx = x+\frac{2x^{\frac{9}{4}}}{9/4}+\frac{x^{\frac{14}{4}}}{14/4}+c = x+\frac{8x^{\frac{9}{4}}}{9}+\frac{2x^{\frac{14}{4}}}{7}+c$$

ג.

$$\int \frac{2x^3+x^2+1}{x^3}dx = \int \left(2+\frac{1}{x}+x^{-3}\right)dx = 2x+\ln|x|-\frac{1}{2x^2} .$$

ד.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) .$$

<u>חישוב אינטגרלים בשיטת ההצבה</u>

<u>משפט</u>

תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בקטע מסוים I , ותהי $\phi(t)$ פונקציה גזירה בקטע מסוים J , כך שלכל $t\in J$ מתקיים $\phi(t)\in I$. אזי $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))+c$.

<u>דוגמא</u>

$\int \frac{2x}{1+x^2}dx$. נבחר בהצבה $x=\phi(t)=\sqrt{t}$ אזי $t=x^2$ ו $dt=2xdx$.

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| = \ln\left(1+x^2\right) .$$

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \tan xdx$ ב. $\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}dx$ ג. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.

<u>פתרון</u>

א. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ נציב $t=\cos x$ ואז $dt=-\sin x dx$.

$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$.

ב. $\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

עבור המחובר השני ניתן להשתמש בנוסחה $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$ ולקבל

$2\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = 2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$.

נשאר לחשב את האינטגרל של המחובר הראשון $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

עבור המחובר הראשון נשתמש בשיטת ההצבה:

נציב $t=x^2$ ואז $dt=2xdx$.

$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right)$.

סה"כ נקבל

$\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right)$.

ג. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}}dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$.

נציב $t=e^x$ ואז $dt=e^x dx$.

$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t = \arctan e^x$.

<u>חישוב אינטגרלים הכוללים פונקצית שורש</u>

<u>תרגיל</u>

פתור את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$. ב. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}dx$ ג. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$ ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

<u>פתרון</u>

א.

נציב $x=t^2$ ואז $dx=2tdt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int \frac{t\cdot 2t}{1+t^2}dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$2\left(\int 1dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt\right) = 2t - 2\arctan t = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c$$

ב.

נציב $t=1+\sqrt{x+2}$ ואז

$\sqrt{x+2}=t-1 \Leftarrow x+2=(t-1)^2 \Leftarrow x=(t-1)^2-2 \Leftarrow dx=2(t-1)dt$.

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{2t-2}{t}dt=\int 2dt-\int\frac{2}{t}dt=2t-2\ln|t|=2+2\sqrt{x+2}-2\ln\left(1+\sqrt{x+2}\right)+c$$

.

ג.

נציב $x=t^4$ ואז $dx=4t^3dt$

$\int\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx=\int\frac{t^4\cdot 4t^3}{t^2+t}dt=\int\frac{4t^6}{t+1}dt$ נבצע חלוקת פולינומים ונקבל ש

$\frac{t^6}{t+1}=t^5-t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}$ ומכאן קל להמשיך....

<u>אינטגרציה לפי חלקים</u>

נניח ש u,v הן פונקציות של x על פי כלל הגזירה של מכפלת פונקציות נקבל ש $(uv)'=u'v+uv'$

ולכן $uv'=(uv)'-u'v$

מכאן נקבל את הנוסחה הבאה: $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$.

<u>תרגיל</u>

חשב בעזרת אינטגרציה בחלקים את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\arctan xdx$ ב. $\int\ln xdx$ ג. $\int e^x\cos xdx$ ד. $\int x^2\cos\frac{x}{2}dx$.

<u>פתרון</u>

א.

נסמן $u=\arctan x$, $v'=1$ ואז $u'=\frac{1}{1+x^2}$, $v=x$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ ונקבל

$$\int\arctan xdx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx \ .$$

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא $\int\frac{x}{1+x^2}dx$.

נבחר בהצבה $t=x^2$ ואז $dt=2xdx$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{2}\ln|1+t|=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \ .$$

ב.

נסמן $u=\ln x$, $v'=1$ ואז $u'=\frac{1}{x}$, $v=x$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ ונקבל

$$\int\ln xdx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+c \ .$$

ג.

נסמן $\begin{matrix} u = e^x \\ v' = \cos x \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = e^x \\ v = \sin x \end{matrix}$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ונקבל

$(1)\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$.

נשאר לחשב את האינטגרל $\int e^x \sin x dx$.

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

נסמן $\begin{matrix} u = e^x \\ v' = \sin x \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{matrix}$.

$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. נציב במשוואה (1) ונקבל

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \Rightarrow 2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x$$

ד.

נסמן $\begin{matrix} u = x^2 \\ v' = \cos\frac{x}{2} \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = 2x \\ v = 2\sin\frac{x}{2} \end{matrix}$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ונקבל

$(1)\int x^2 \cos\frac{x}{2} dx = 2x^2 \sin\frac{x}{2} - \int 4x \sin\frac{x}{2} dx$.

נשאר לחשב את האינטגרל $\int 4x \sin\frac{x}{2} dx$.

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

נסמן $\begin{matrix} u = 4x \\ v' = \sin\frac{x}{2} \end{matrix}$ ואז $\begin{matrix} u' = 4 \\ v = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix}$.

$$\int 4x \sin\frac{x}{2} dx = -8x\cos\frac{x}{2} + \int 8\cos\frac{x}{2} dx = -8x\cos\frac{x}{2} + 16\sin\frac{x}{2}$$

נציב ב (1) ונקבל

$(1)\int x^2 \cos\frac{x}{2} dx = 2x^2 \sin\frac{x}{2} + 8x\cos\frac{x}{2} - 16\sin\frac{x}{2}$.

<u>פתרון אינטגרלים באמצעות נוסחת נסיגה</u>

נרצה לחשב את סדרת האינטגרלים $I_n = \int f_n(x)dx$.

שיטת האינטגרציה לפי חלקים מאפשרת למצוא אינטגרל באמצעות נוסחת נסיגה.

נחשב את I_1 ולאחר מכן נחשב את I_{n+1} באמצעות I_n.

נרשום את הפתרון $\begin{cases} I_1 = \int f_1(x)dx \\ I_{n+1} = \phi(I_n) \end{cases}$

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרל $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$.

<u>פתרון</u>

עבור $n=1$ נקבל $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$.

עבור $n>1$ נשתמש בנוסחה $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$.

נסמן $u = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}$ ואז $u' = \frac{-2nx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$

$v'=1$ $\quad v=x$

נקבל

$$(1) I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$.

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+1-1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx - \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx = \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n}}dx - \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1}$$

נציב ב (1) ונקבל $I_n = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right) \Leftarrow I_{n+1} = \frac{x}{2n\left(x^2+1\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$.

<u>פתרון אינטגרלים של פונקציות רציונליות</u>

פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ נקראת פשוטה אם מעלת הפולינום $P(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$.

בעזרת חילוק פולינומים ניתן להגיע לפונקציה רציונלית פשוטה.

<u>דוגמא</u>

$$\frac{x^3}{x+2} = \left(x^2-2x+4\right) - \frac{8}{x+2}.$$

נלמד בשיעור לפתור אינטגרלים מהצורה $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$.

<u>שלב א</u>

נשים לב ש $Q'(x) = 2x+p$ ואז ניתן לרשום את השבר באופן הבא

$\frac{\frac{a}{2}(2x+p) + b - \frac{pa}{2}}{x^2+px+q}$ נסמן $t = b - \frac{pa}{2}$ ונשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא:

$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + t\int \frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

את האינטגרל של המחובר הראשון אנחנו יודעים לפתור בעזרת שיטת ההצבה.

נשאר ללמוד לפתור את האינטגרל $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$.

<u>דוגמא</u>

נפתור את האינטגרל $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx$.

נשים לב ש $Q'(x)=2x+2$.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx+2\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx.$$

המחובר הראשון ניתן לפתור בעזרת שיטת ההצבה ולקבל $\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+1\right)$

.

המחובר השני נפתור באופן הבא: $2\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx=2\int \frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{-2}{x+1}$.

סה"כ נקבל $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+1\right)-\frac{2}{x+1}$.

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

<u>מקרה 1</u>

$p^2-4q=0$

במקרה כזה ניתן לרשום $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx=\int \frac{1}{(x+n)^2}dx=-\frac{1}{x+n}$.

<u>דוגמא</u>

$\int \frac{1}{x^2+6x+9}dx$ נשים לב ש $6^2-4\cdot 9=0$.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+9}dx=\int \frac{1}{(x+3)^2}dx=-\frac{1}{x+3}+c.$$

<u>מקרה 2</u>

$p^2-4q<0$

ניתן לרשום את x^2+px+q באופן הבא

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{(x+b)^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a}$.

<u>דוגמא</u>

$$\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx=\int \frac{1}{x^2+4x+4+4}dx=\int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx=\int \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}$$

<u>מקרה 3</u>

$p^2-4q>0$ ואז למשוואה $x^2+px+q=0$ יש שני פתרונות $x_1=\alpha, x_2=\beta$ ואז

$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$.

וקיבלנו אינטגרל $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx = \frac{1}{\alpha-\beta} \int \left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right) dx$
שאנחנו יודעים לפתור.

<u>דוגמא</u>

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+3)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+3} dx =$$
$$\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x+3|$$