אתר המרצה: http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TOP.html

אתר הקורס: math wiki טופולוגיה 8822205

הרצאה 1

מרחבים מטריים

קישור מומלץ: https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

הגדרה (Frechet 1906): **מטריקה** (או **מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה –

$$d : X \times X \to [0,\infty) \quad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

אם מתקיימים התנאים אז אומרים ש - (X,d) **מ"מ** (metric space).

טענה 1: יכולנו להגדיר פסאודו-מטריקה d על X כפונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$. ואז להוכיח (בעזרת האקסיומות) שהיא לא שלילית. ז"א תמיד מתקיים:

$$\forall x,y \in X: d(x,y) \geq 0$$

(ז"א $d: X \times X \to [0,\infty)$).

הוכחה:

$$2 \cdot d(x,y) = d(x,y) + d(x,y) \underbrace{=}_{m_2} d(x,y) + d(y,x) \underbrace{\geq}_{m_3} d(x,x) \underbrace{=}_{m_1^s} 0$$

לכן –

$$2 \cdot d(x,y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d(x,y) \geq 0}$$

■

דוגמאות:

- $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי – $d(x,y) = |x-y|$

- $X=\mathbb{R}^n$

א. מטריקה אוקלידית $(\mathbb{R}^n,d)$ שמוגדרת לפי –

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\quad ,x=(x_1,..,x_n)\,,y=(y_1,..,y_n)$$

ב. מטריקת הסכום

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\quad ,x=(x_1,..,x_n)\,,y=(y_1,..,y_n)$$

ג. מטריקת המקסימום $$d(x,y)=\max\{|x_i-y_i|:\mathrm{i}\in\{1,\cdots,n\}\}$$

הערה: $d_{\max}\le d\le d_1\le nd_{\max}$

- בקבוצה $\mathrm{C}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ continuous\ \ functions\}$

א. המוגדרת לפי –

$$d_{max}(f_1,f_2)=\max_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$$

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1,f_2 בקטע

(ממשפט ויירשטראס מתקבל מקסימום בקטע $[a,b]$).

ב. $$d_1(f_1,f_2)=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\,dx$$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1,f_2 בקטע $[a,b]$

<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

m_1^p) $x=y\Rightarrow d(x,y)=0$ (החלשה של m_1).

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3) $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)$

<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** $(ultrametric)$ אם:

$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ $(m_1$.

$d(x,y)=d(y,x)$ $(m_2$.

$\max\{d(x,y),d(y,z)\} \geq d(x,z)$ $(m_3^u$ (חיזוק של m_3).

<u>הערה:</u>
$\{pseudometric\} \supset \{metric\} \supset \{ultrametric\}$

<u>דוגמה :</u> לכל קבוצה X נגדיר –
$\forall x,y \in X: d_0(x,y)=0$

פסאודו מטריקת האפס.

זאת פסאודו מטריקה תמיד, אבל זו מטריקה $|X|=1 \Leftrightarrow$ (ז"א אם X נקודון).

- **<u>דוגמה:</u>**

א. ב - $X=\mathbb{R}^2$, נגדיר – $\rho_1(x,y) := |x_1-y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל –

$$\rho_1\big((3,5),(3,18)\big)=0$$

(<u>הערה</u> – אם נגדיר יחס שקילות ש – x ו – y שקולים אם $\rho_1(x,y)=0$ אז ניתן להסתכל על מחלקות השקילות ובעצם יצרנו את $\mathbb{R}$).

- **<u>דוגמה:</u>** לכל מטריקה d גם $c \cdot d$:$\forall c>0$ מטריקה

<u>טענה 2:</u> על כל קבוצה X עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

- **<u>דוגמה:</u>** נגדיר על קבוצה X מטריקת "0-1":

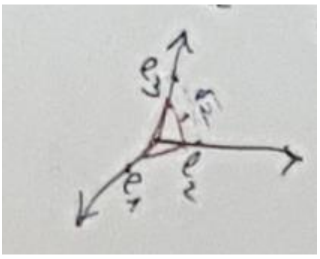
$$d_\Delta(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

d_Δ אולטרה-מטריקה (לבדוק!).

<u>למשל:</u>

$$X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

עם מטריקה שמושרית מ – d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ.



$$d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

נשים לב כי כאשר $i \neq j$ –

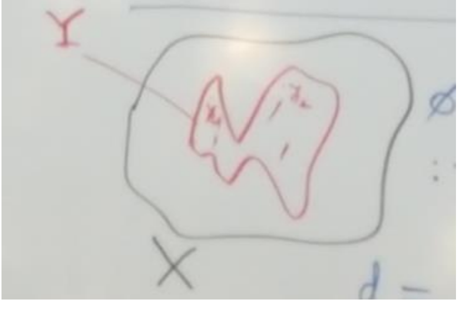
$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \cdots + 1^2 + \cdots} = \sqrt{2}$$

- אולטרה-טריקה p-אדית על $\mathbb{Z}$

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 1, x = y \\ \frac{1}{p^k}, k = \max\{i \in \{0,1,2,\cdots\} \ \ \frac{x-y}{p^k} \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

$$d_3(0,5) = 1, d_3(0,27) = \frac{1}{3^3}$$

<u>הגדרה (תת מרחב מטרי):</u> יהי (X,d) מ"מ, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדר:

$$d = d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y$$

מתקבל מ"מ (Y, d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X, d).

<u>למשל:</u>

$$\underbrace{Y = \left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}}, 1 \le i \le n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}} \subset \underbrace{(\mathbb{R}^n, d)}_{=X}$$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל - d_Δ.

<u>הגדרה:</u> נתון מ"מ (X, d), $\emptyset \neq A, B \subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A, B)} = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \le d(A, B) < \infty$$

<u>אזהרה:</u> זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

רמז: אין אישוויון המשולש (תנו דוגמה)

<u>הערה:</u>

לא תמיד inf ניתן להחליף ב - min. למשל –

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$min \neq inf = d(A, B) = 0$$

<u>תרגיל (חשוב!):</u> (ראו שיעורי בית 1)

תמיד מתקיים –

$$|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$$

$$\forall x, y \in X, \emptyset \neq A \subset \underbrace{(X, d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

<u>רמז:</u> $|d(x, a) - d(y, a)| \le d(x, y)$.

קודם להוכיח מקרה פרטי $A = \{a\}$ דרך m_3 + הגדרת inf.

<u>הגדרה (הקוטר):</u>

$$\boldsymbol{diam(A)} \coloneqq \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$$

$$0 \le diam(A) \le \infty$$

A נקראת **חסומה** אם $diam(A) < \infty$.

הערה: לא תמיד $sup = max$.

$$A = (0,1)$$

$$max \ldots \neq sup \ldots = diam = 1$$

הגדרות: יהי (X,d) , $a \in X$, $r > 0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב – a ורדיוס r =:

$$a \in B(a,r) = B_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a,x) < r\}$$

2) **כדור סגור** עם מרכז ב – a ורדיוס r =:

$$a \in B[a,r] = B_r[a] \coloneqq \{x \in X | d(a,x) \le r\}$$

3) **ספרה** *sphere*

$$a \notin S(a,r) = S_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a,x) = r\}$$

הערה:

$$a \in B(a,r) \subseteq B[a,r]$$

$$\underbrace{S(a,r)}_{a \notin} \subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a \in}$$

תרגיל: לתאר $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$ במרחב $(X, d_{\triangle})$.

תרגיל: תנו דוגמאות של מ"מ ששם ייתכן:

$$S(a,r) = \emptyset$$

$$B(a,r) = B[a,r]$$

עבור a,r מסוימים.

אזהרה: זה לא ייתכן ב - $\mathbb{R}^n$ או במרחבים נורמיים.

תרגיל: לתאר $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$ במרחבים $(\mathbb{R}^2, d_{max}), (\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d)$

<u>תכונות:</u> (לבדוק !)

א) $B_{r_1}(a) \subseteq B_{r_2}(a) \Leftarrow 0 \le r_1 \le r_2$.

ב) $diam\big(B_r(a)\big) \le 2r$ (לא תמיד שווה).

ג) $A \subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z \in X, \exists r > 0: A \subseteq B_r(z)$.

ד) (כדור בתת מרחב)

$$B_{d_r}(y,\epsilon) = B(y,\epsilon) \cap Y$$

ה) מצאו מ"מ (X,d) וכדורים שונים כך ש

$$\begin{cases} B_{r_1}(a) \neq B_{r_2}(b) \\ B_{r_1}(a) \subset B_{r_2}(b) \\ r_1 > r_2 \end{cases}$$

<u>רמז:</u> שוב תת – מרחב, למחוק ...

ו) $d \le \rho \Rightarrow B_\rho(a,r) \subseteq B_d(a,r)$

<u>הגדרה:</u> (מרחב נורמי) נניח E מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$. פונקציה $\|\cdot\|: E \to [0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

n_1) $\|\mathrm{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v} = 0_E$

n_2) $\|c\mathrm{v}\| = |c| \cdot \|\mathrm{v}\|$ לכל $c \in \mathbb{R}, v \in E$

n_3) $\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| \le \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|$

אז $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה

$$d_{\|\cdot\|}: \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to [0,\infty) \quad d_{\|\cdot\|}(u,v) := \|u - v\|$$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים $\|\mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, \mathrm{v})$.

הערה: "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|)\mapsto(\mathrm{E},d_{\|\cdot\|})$ $\{normed\ spaces\}\to\{metric\ spaces\}$
היא:

א. לא על

(למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל)

ב. חד חד ערכית

(נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$ -- מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה).

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ נגדיר

א. נורמה אוקלידית $\|\mathrm{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|\mathrm{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|\mathrm{x}\|_{\max}=\max\{|x_i|:i\in\{1,\cdots,n\}\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|\mathrm{x}\|_{\max}\le\|\mathrm{x}\|\le\|\mathrm{x}\|_1\le n\|\mathrm{x}\|_{\max}$

- $\mathrm{C}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ continuous\ \ functions\}$ נגדיר:

א. $\|\mathrm{f}\|_{\max}=\max\{|\mathrm{f(x)}:\mathrm{x}\in[\mathrm{a,b}]\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

ב. $\|\mathrm{f}\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ (משרה מטריקת השטחים d_1)

תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(\mathrm{C}[a,b],\mathrm{d}_{\max})$ עם מרכז בפונקצית האפס.

תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(\mathrm{C}[a,b],\mathrm{d}_1)$ עם מרכז בפונקצית האפס.

<u>הגדרה:</u> $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – f **איזומטריה** אם –

$$\begin{cases} f(X)=Y \\ f\ \text{שומרת מרחקים} \end{cases}$$

שומרת מרחקים, כלומר –

$$\forall x_1, x_2 \in X: \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d(x_1, x_2)$$

טענה: כל איזומטריה היא תמיד חח"ע.

הוכחה:

אם $x_1 \neq x_2$ נניח ש –

$$f(x_1) = f(x_2)$$

אז לכן –

$$0 = \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d(x_1, x_2) \underbrace{>}_{m_1} 0$$

בסתירה!

■

הגדרה: אם בהגדרה הנ"ל דורשים רק את השמירה על מרחקים (לא בהכרח $f(X) = Y$) אז אומרים שהפונקציה היא **שיכון איזומטרי**.

שימו לב: אם $f : X \to Y$ שיכון איזומטרי אז $f : X \to f(X)$ איזומטריה.

הערה:

איזומטריה ב – $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

למשל:

$$[8,10] \not\simeq [1,2] \simeq [5,6]$$

קיים שיכון איזומטרי ליניארי $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \leq n$

(למשל $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$)

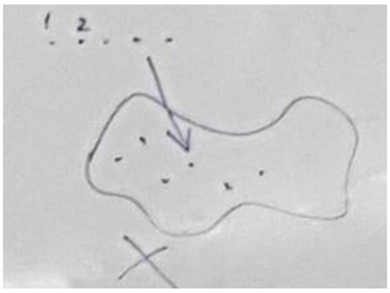
סדרות

הגדרה (תזכורת): סדרה בקבוצה X היא פונקציה –

$$\{1,2,\dots\} = N \xrightarrow{f} X$$

$$n \mapsto f(n) = x_n$$

(מסמנים גם a_n או b_n).



<u>הגדרה:</u> אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל a במרחב (X,d)

ונסמן $\lim x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$)

אם:

$d(a,x_n) \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

ז"א אם –

$$\lim_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$$

<u>ניסוח שקול:</u> כל כדור $B(a,\mathrm{r})$ של a מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

<u>ניסוח שקול:</u> $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

<u>הגדרה:</u> נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם –

$$\exists \epsilon > 0: B(a,\epsilon) = \{a\}$$

<u>הגדרה:</u> נניח (X,d) מ"פ. תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת **פתוחה** אם מתקיים:

$$a \in A \Rightarrow \exists \varepsilon_a > 0 \quad B(a,\varepsilon_a) \subseteq A$$