תרגול 4

9 ביולי 2013

מטריצות אלמנטריות

ראינו בתרגול 2 שלוש סוגי פעולות אלמנטריות. לכל פעולה אלמנטרית נתאים מטריצה הנקראת מטריצה אלמנטרית.

ע"י הפעלת הפעולה על מטריצת היחידה $\rho \rightleftarrows \rho(I)$.

דוגמאות (ב $\mathbb{F}^{3\times3}$)

החלפת שורות $R_2 \leftrightarrow R_3$ מתאים למטירצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

הכפלת שורה 1 ב־5 $5 \cdot R_1 \to R_1$ מתאים למטריצה $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

החסרת שורה 3 משורה 1 $R_1 - R_3 \to R_1$ מתאים למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

הערות:

1. משפט: הפעלת פעולה שורה ρ על מטריצה A זהה להחפלת המטריצה המתאימה מימין $\rho(I)A$.

2. המכפלה $A\rho(I)$ זהה להפעלת פעולת עמודה אלמנטרית.

דוגמא: המטריצה $\rho(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ כאשר ρ מציין הורדת עמודה 1 מעמודה 3 $C_3 - C_1 \to C_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

הפיכות

תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אם קיימת $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש $AB = BA = I_n$ אזי A תקרא הפיכה ו B תקרא ההופכית שלה ותוסמן ב $B = A^{-1}$. **הערה: משפט: מספיק ש B תקיים ש $BA = I_n$ או $AB = I_n$ ואז A הפיכה (לא את שני השיוויונות $AB = BA = I_n$).**

חידוד $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ אזי $AA^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ אבל לכל $B\in\mathbb{F}^{2\times 3}$ מתקיים $BA=\begin{pmatrix}|&|&0\\C_1(B)&C_2(B)&0\\|&|&0\end{pmatrix}\neq I_3$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. הוכח $AB=0\Rightarrow B=0$.

פתרון: $AB=0\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}0=0\Rightarrow B=0$ ■

הערה: אם A אינה הפיכה אז הטענה לא נכונה דוגמא

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

במקרה כזה ש $AB=0$ או $BA=0$ ו $B\neq 0$ אז A תקרא מחלקת אפס

תרגיל: A הפיכה $\Leftrightarrow$ A^k : $\exists k\in\mathbb{N}$ הפיכה.

פתרון: $(\Rightarrow)$ נתון A^k הפיכה $\Leftarrow$ $A^kB=I\Leftarrow$ $AA^{k-1}B=I\Leftarrow$ $AC=I$ כאשר $C=A^{k-1}B$ כלומר A הפיכה.

$(\Leftarrow)$נתון ש־A הפיכה. נבחר $k=1$ וסיימנו. ■

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה עם שורת אפסים. הוכח: A לא הפיכה.

פתרון: תהא שורה i שורת האפסים. אזי $R_i(AB)=R_i(A)B=\vec{0}B=\vec{0}$ לכל B בפרט לא קיימת B כך ש$AB=I$.

משפט: מטריצה אלמנטרית $E=\rho(I)$ היא הפיכה ומתקיים $E^{-1}=\rho^{-1}(I)$.

תרגיל: מצא את ההופכית של המטריצות מתחילת השיעור:

פתרון :
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

הערה: עבור מטריצה P־המחליפה שורות $R_i\leftrightarrow R_j$ מתקיים $P^2=I$ כלומר $P^{-1}=P$.

תרגיל: יהיו A,B הפיכות הוכח :

1. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

   פתרון: נבדוק ישירות

   $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$.

   (א) הכללה: אם $A_1\ldots A_k$ הפיכות אזי $(A_1\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_1^{-1}$

2. לכל n טבעי מתקיים $(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$

   הוכחה: באינדוקציה: עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור $n-1$ ונוכיח עבור n

$$\begin{aligned}(AA\cdots A)(A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}) &= A^{n-1}AA^{-1}(A^{-1})^{n-1}\\ &= A^{n-1}(A^{-1})^{n-1}\underset{\text{Induction assumption}}{=}A^{n-1}(A^{n-1})^{-1}=I\end{aligned}$$

הערה: לא ניתן לדעת שום דבר על הביטוי $(A+B)^{-1}$.

ייתכן $A=I, B=-I$ הפיכות ו $A+B=0$ לא הפיכה.

יתכן $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא הפיכות ו $A+B=I_2$ הפיכה.

3. $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

פתרון $A^t(A^{-1})^t=(A^{-1}A)^t=I^t=I$.

מסקנה אם Aהפיכה וסימטרית אזי A^{-1} גם כן סימטרית.

הסבר $A^{-1}=(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t \Leftarrow A^{-1}$ סימטרית ■

דוגמא נוספת: מבדיקה ישירה רואים ש $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

למשל מטריצת סיבוב בזוית θ במישור $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$

ההופכית שלה היא $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(-\theta) \\ sin(-\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \frac{1}{cos^2(\theta)+sin^2(\theta)}$

סיבוב ב $(-\theta)$

אלגוריתם להפוך מטריצות

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ Aל־ I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר $E_n\cdots E_1A=I$ (E_i) אלמנטריות.

$\Leftarrow E_n\cdots E_1 I=E_n\cdots E_1=A^{-1}$ לכן אם נתבונן ב־ $(A|I)$ נפעיל פעולות אלמנטריות $E_n\cdots E_1$ על המטריצה המורחבת נקבל בסוף $(I|A^{-1})$.

תרגיל:חשב עבור את ההוכפית של $A=\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & 1 \end{array}\right)$$

פתרון

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 2i & 2 & -2i \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array}\right)$$

כלומר $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-i\\1&-i&-1\\-i&-1&2i\end{pmatrix}$

הערות:

1. בהנתן מטריצה הפיכה A אזי למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד והוא $x=A^{-1}b$

לדוגמא: הפתרון למערכת $\begin{pmatrix}i&1&0\\1&i&1\\0&1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

הינו $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&1&0\\1&i&1\\0&1&i\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-i\\1&-i&-1\\-i&-1&2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. אם אחרי הדירוג של A לא שווה ל I אזי A אינה הפיכה.
הוכחה: נסמן ב E את מכפלת המטריצות האלמנטריות שמדרגות את A. ברור כי E הפיכה כמכפלה של מטריצות הפיכות. אם A הפיכה אזי גם EA הפיכה. אבל ב EA יש שורת אפסים כי $EA \neq I$ סתירה לתרגיל מתחילת התרגול .

פירוק מטריצה הפיכה למטריצות אלמנטריות

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ Aל- I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר $E_n\cdots E_1A=I$ (E_i)אלמנטריות.
$\Leftarrow E_n\cdots E_1=A^{-1}$, $A=E_n^{-1}\cdots E_1^{-1}I=E_n^{-1}\cdots E_1^{-1}$.

תרגיל: תהא $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. פרק את A ו A^{-1} למטריצות אלמנטריות.

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_3\to R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

את הפעולות האלמנטריות נייצג במטריצה האלמנטרית המתאימה

$$E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כלומר $E_3E_2E_1A=I$

$$\Leftarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=A,\ A^{-1}=E_3E_2E_1.$$