פתרון מבחן דמה תשע"ז

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)\sin(e^x)\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(e^x-1\right)}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\sin(e^x)\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos\left(x\right)}=1\cdot 1\cdot\sin(1)\cdot 1\cdot 2=2\sin\left(1\right)$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{2^{n^2}}$$

$$\frac{7^n}{2^{(n^2)}}=\left(\frac{7}{2^n}\right)^n\to 0^\infty=0$$

א. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

קל לבדוק שהסדרה הכללית שואפת לאפס, ולכן נמשיך.

נבדוק התכנסות בהחלט

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

כיוון ש $0<\frac{1}{n^2}<1<\pi$ אז $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)>0$

נעשה מבחן השוואה עם הטור $\sum\frac{1}{n^2}$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\to 1$$

לכן הם חברים, וכיוון שהטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס, יוצא שהטור בשאלה מתכנס בהחלט!

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$

קל לוודא כי האיבר הכללי של הטור שואף לאפס לפי סדרי גודל, לכן נמשיך.

נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum\frac{\ln(n)}{n}\ge\sum\frac{1}{n}$$

(החל מ$n=3>e$)

לכן הטור אינו מתכנס בהחלט.

נרצה לומר שהוא מתכנס בתנאי לפי לייבניץ, אך צריך לוודא:

$$\frac{\ln(n)}{n}\to 0$$

$\frac{\ln(n)}{n}$ מונוטונית

את שני הדברים נעשה באמצעות חקירת פונקציות!

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

לפי סדרי גודל, ולכן גם אם נציב את הסדרה $n\to\infty$ נקבל כי $f(n)\to 0$ לפי היינה.

כעת נחקור תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

הסימן נקבע ע"י המונה כי המכנה חיובי.

בתחום (e,∞) המונה שלילי ולכן הנגזרת שלילית, והפונקציה יורדת.

לכל לכל $n>e$ מתקיים שכיוון ש $n+1>n>e$

$$f(n+1)<f(n)$$

והוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת אחרי $n=3$.

מספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הטור.

ולכן הטור מתכנס לפי לייבניץ, וכיוון שלא מתכנס בהחלט הוא סה"כ מתכנס בתנאי.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

$$\sum\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\sum\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

כעת קל לראות שהאיבר הכללי שואף לאפס ולכן נמשיך.

אמנם מבחן השוואה גבולי הוא הדבר החכם ביותר לעשות, אך בואו נעשה טריק

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\geq\frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}+n}=\frac{1}{3n}$$

והטור $\sum\frac{1}{3n}$ מתבדר, ולכן גם הטור שלנו מתבדר.

3. תהי סדרה חיובית a_n ויהי קבוע $2<d\in\mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $d\leq\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

כמו כן, נתון כי $a_1<a_2$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty}a_n$.

סעיף א' ננסה להוכיח באינדוקציה

בדיקה: נתון $a_1<a_2$

יהי n עבורו $a_n<a_{n+1}$

צ"ל כי $a_{n+1}<a_{n+2}$

כיוון שהסדרה חיובית בעצם נתון כי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$$

צ"ל

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}>1$$

מהנתון אנחנו למדים כי

$$2<d\leq\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

ולכן

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\geq 2-\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

אבל אנחנו יודעים ש $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ ולכן

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq 2 - \frac{a_n}{a_{n+1}} > 2 - 1 = 1$$

סעיף ב':

<u>אם</u> a_n חסומה, אז כיוון שהיא עולה היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n \to L$

כיוון שלכל n מתקיים כי

$$d \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

נובע כי הגבול של הביטוי הימני גדול או שווה לd

$$\lim \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \left\{\frac{L+L}{L}\right\} = ?$$

אם $L \neq 0$ נקבל כי הגבול הוא 2

ולכן $d \leq 2$ בסתירה! ולכן במקרה זה a_n אינה חסומה ולכן $a_n \to \infty$

אבל האם ייתכן ש$L = 0$? לא. כי הסדרה עולה ולכן $L \geq a_1 > 0$.

סה"כ $a_n \to \infty$

.4

א. תהיינה שתי פונקציות f, g הגזירות בקטע A, כך ש $\forall x \in A: f'(x) = g'(x)$.

כמו כן, נתון כי קיימת נק' $a \in A$ עבורה $f(a) = g(a)$.

הוכיחו כי $\forall x \in A: f(x) = g(x)$.

ב. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

תזכורת: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

לכן הפונקציה יורדת בקטע A וגם עולה בקטע A ולכן היא קבועה.

$$h(x) \equiv C$$

נציב את $x = a$ ונקבל $C = h(a) = f(a) - g(a) = 0$

ולכן לכל נקודה $x \in A$ מתקיים כי $h(x) = 0$ ולכן $f(x) = g(x)$.

סעיף ב'

בעזרת סעיף א', נראה ששתי הפונקציה שוות בנקודה אחת בקטע $(0, \infty)$ וכן נגזרותיהן שוות בקטע זה ולכן סיימנו.

$$x = 1$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

כעת נוכיח שהנגזרת שוות בקטע

$$\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

זו בדיוק הנגזרת של הפונקציה הקבועה $\frac{\pi}{2}$ וסיימנו.

הערה קצרה מאינפי 2:

נניח אני רוצה לחשב את $\arctan(3)$

נפתח טור טיילור

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

נעשה אינטגרל מ0 עד x

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

עבור $x = 3$ הטור אינו מתכנס והשוויון אינו נכון!

לפי התרגיל האחרון

$$\arctan(3) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

ו$x = \frac{1}{3}$ כן מותר להציב בטור!

לגבי $\ln(3)$ אומרים שזה $-\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

5. תהי פונקציה f רציפה בכל $\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)=0$.

א. הוכיחו כי f חסומה מלרע.

ב. הוכיחו/הפריכו: f מקבלת בהכרח מינימום.

נב"ש שהפונקציה אינה חסומה מלרע, לכן לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $a_n\in\mathbb{R}$ עבורה

$$f(a_n)<-n$$

לכן לפי חצי סנדביץ'

$$f(a_n)\to-\infty$$

ניקח תת סדרה מונוטונית a_{k_n}

$$f\left(a_{k_n}\right)\to-\infty$$

שלוש אפשרויות:

1. $a_{k_n}\to\infty$
2. $a_{k_n}\to-\infty$
3. $a_{k_n}\to c\in\mathbb{R}$

באפשרות אחת נקבל מהנתון (הגבול מימין) ש $f\left(a_{k_n}\right)\to\infty$ בסתירה

באפשרות שתיים נקבל מהנתון (הגבול משמאל) ש $f\left(a_{k_n}\right)\to 0$ בסתירה

באפשרות שלוש נקבל מהנתון (הרציפות) ש $f\left(a_{k_n}\right)\to f(c)$ בסתירה

סעיף ב' – הפרכה e^x

קל לוודא שמקיימת את תנאי השאלה, ואין לה מינימום כי היא שואפת לאפס ואף פעם לא שווה לאפס.

.3

א. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=e^{-x}+e^{x}$ יש מינימום גלובאלי, ומצאו אותו.

ב. הוכיחו כי לכל $a\in\mathbb{R}$ למשוואה $e^{x}-e^{-x}=a$ **קיים** פתרון **יחיד**.

סעיף א':

$$f'(x)=-e^{-x}+e^{x}=e^{x}(1-e^{-2x})=e^{x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)$$

הנגזרת שלילית בתחום $x<0$

וחיובית עבור $x>0$

לכן הפונקציה יורדת בתחום $(-\infty,0]$ ועולה בתחום $[0,\infty)$ ולכן המינימום הגלובאלי הוא ב $x=0$

והערך המינימלי הוא

$$f(0)=2$$

סעיף ב':

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=e^{x}-e^{-x}-a$$

אנחנו רוצים להוכיח שפונקציה זו חותכת את הציר בדיוק פעם אחת.

נבדוק תחומי עלייה וירידה

$$h'(x)=e^{x}+e^{-x}$$

אנחנו רוצים לדעת מתי הנגזרת חיובית ומתי היא שלילית.

אבל בסעיף א' גילינו כי

$$h'(x)=f(x)\geq 2$$

כלומר הנגזרת של h תמיד חיובית ולכן h עולה בכל הממשיים.

לכן h חותכת את הציר לכל היותר פעם אחת

נבדוק מה קורה בקצות הקטע, אי אפשר להציב את הקצוות אז נחשב גבול

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{x}-e^{-x}-a=\{0-\infty-a\}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}e^{x}-e^{-x}-a=\{\infty-0-a\}=\infty$$

לכן קיימת נקודה מתחת לציר ונקודה מעל הציר, h רציפה כצירוף אלמנטריות, ולכן לפי ערך הביניים יש לפחות חיתוך אחד.

סה"כ קיבלנו בדיוק חיתוך אחד עם הציר כפי שרצינו.

.2

א. חשבו את $\int \arctan\left(\sqrt{x}\right) dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$, ואם כן חשבו אותו.

סעיף א':

ננסה להשתמש באינטגרציה בחלקים (למרות שאני מודה שהצבה נראית יותר סבירה).

$$\int \arctan(\sqrt{x})\, dx = \begin{Bmatrix} f' = 1 & g = \arctan(\sqrt{x}) \\ f = x & g' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{Bmatrix} = x \cdot \arctan(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx =$$
$$= x \cdot \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C$$

כאשר:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \begin{Bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{Bmatrix} = \int \frac{t}{1+t^2} 2tdt = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt =$$

דרגת המונה והמכנה שוות ולכן נבצע חילוק פולינומים

$$\begin{array}{l} \quad 1 \\ \quad t^2 \mid t^2 + 1 \\ - \\ \quad t^2 + 1 \\ \qquad -1 \end{array}$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

נמשיך

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2t - 2\arctan(t) = 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x})$$

סעיף ב':

מדובר בפונקציה חיובית ולכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי (הרי cos חיובי בתחום שבין אפס לחצי).

נשווה עם האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

קיבלנו מספר סופי שונה מאפס ולכן האינטגרלים חברים.

כיוון שהחזקה של $\frac{1}{\sqrt{x}}$ היא חצי וחצי קטן מ1 האינטגרל הזה מתבדר ולכן גם האינטגרל בשאלה מתבדר.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}} + \sqrt[n]{\frac{e^2}{n^n}} + \ldots + \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}}$

ב. חשבו את $\sqrt{2}$ עד רמת דיוק של $h = 0.05$

סעיף א':

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\frac{e^k}{n^n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{e^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}}$$

אלה סכומי רימן של הפונקציה e^x הרציפה בקטע $[0,1]$ עם בחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$

ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל:

$$a_n \to \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

סעיף ב':

נשתמש בקירוב באמצעות פולינום טיילור.

נעזר בפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ כאשר הנקודה המצוייה היא $x_0 = 1$ והנקודה הרצוייה היא $x = 2$

ננחש $n = 3$ ונבדוק שהשגיאה אכן קטנה מספיק

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}}$$

לפי לגראנז קיימת נקודה $1 < c < 2$ כך ש

$$R_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \cdot (2-1)^4$$

$$|R_4| = \frac{15}{16 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{c^{\frac{7}{2}}} \underbrace{\leq}_{\text{נקטין את המכנה ונגדיל את הביטוי}} \frac{15}{16 \cdot 24} \cdot \frac{1}{1^{\frac{7}{2}}} < \frac{1}{24} < \frac{1}{20} = 0.05$$

כעת נציב בפולינום טיילור ונקבל את הקירוב

$$\sqrt{2} = f(2) \approx P_3(2) = f(1) + f'(1)(2-1) + \frac{f''(1)}{2}(2-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(2-1)^3 =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{16} \cdot 1^{-\frac{5}{2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$