תרגיל בית 6 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חזרה)**.** נסתכל על $G = U_{14} \times \mathbb{Z}_4$.

א. מהו הסדר של $(3,2)$ ב-G? נמקו.

ב. האם G אבלית? נמקו.

ג. האם G ציקלית? נמקו.

שאלה 2. מצאו את האינדקסים הבאים. משפט לגראנז' הוא שימושי.

א. $[U_{14} : \langle 11 \rangle]$

ב. $[\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : \langle (2,2) \rangle]$

ג. $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (2,2) \rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

ד. $[2\mathbb{Z} \times S_3 : 6\mathbb{Z} \times \langle \mathrm{id} \rangle]$

שאלה 3. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת־חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $(|H|, |K|) = 1$, אז $H \cap K = \{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

שאלה 4. נסתכל על $G = GL_2(\mathbb{Z}_2)$, חבורת המטריצות ההפיכות מגודל 2×2 מעל $\mathbb{Z}_2$.

א. כתבו את כל איברי G (הזכרו בהבדל בין $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ ל-$M_2(\mathbb{Z}_2)$).

ב. תהי G $A = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leq G$ תת־חבורה של G. מצאו את $[G : A]$.

ג. תהי G $B = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leq G$ תת־חבורה של G. מצאו את $[G : B]$.

ד. מצאו איזומורפיזם $\varphi \colon G \to S_3$ מפורש (כתבו לאן נשלח כל איבר).
את הבדיקה שאכן מדובר באיזומורפיזם אפשר (וכדאי) לממש בעזרת תוכנה, שהרי אפשר לממש את החבורות האלו במחשב ואנחנו יודעים איך לכפול את האיברים שלהן. אפשר להעזר במערכת מתמטית כמו SageMath לצורך הפתרון.

תרגיל 5. תהי G חבורה מסדר 8.

א. הוכיחו שאם G ציקלית, אז יש לה תת־חבורה מסדר 4 (למה ברור כי תת־החבורה כאן היא ציקלית?).

ב. הוכיחו שאם G לא אבלית, אז יש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4 (כאן הציקליות של תת־החבורה לא ברורה מיידית).

ג. מצאו דוגמה נגדית לסעיף הקודם אם G אבלית.

ד. (רשות) נכליל למקרה שבו G היא חבורה לא אבלית מסדר 2^t עבור $t > 2$. הוכיחו שיש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

שאלה 6 (רשות)**.** נקרא למטריצה M מטריצת תמורה אם היא מטריצה שכל האיברים בה הם אפסים ואחדות, ושבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק פעם אחת 1. למשל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היא מטריצת תמורה בגודל 4×4. הוכיחו שאוסף מטריצות התמורה בגודל $n \times n$ הוא חבורה עם הפעולה של כפל מטריצות. התאימו לכל איבר $\sigma \in S_n$ מטריצת תמורה M_σ כך שיתקבל איזומורפיזם, והוכיחו שהסימן של σ הוא הדטרמיננטה של M_σ.

בהצלחה!