

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 88211
המרצה: מיכאל מגרל
המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן
תאריך: 04.10.2011 מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)
בנוסף יש גם שאלת בonus השווה 5 נקודות.

השאלות:

1. א. הוכיחו את משפט Sylow.
ב. תהא G חבורה מסדר 21 כך שיש בה יותר משני איברים מסדר 3. הראו כי G לא אבלית אבל פתירה.
ג. חבורה G בעלת 15 אלמנטים פועלת מעל קבוצה עם 30 אלמנטים. הוכיחו או הפריכו: קיימת נקודת שבת.
2. א. נניח $Q := \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ חבורה בפעולת הכפל המוגדרת ע"י $ijk = k^2 = i^2 = j^2 = -1$.
השלימו את טבלת הכפל והוכיחו שכל ת"ח של Q היא נורמלית ב Q .
ב. מצאו תמונות אפימורפיות של Q (עד כדי איזומורפיזמים).
ג. תנו דוגמאות של 5 חבורות לא איזומורפיות עם 8 איברים.
3. א. תנו דוגמה של מונואיד (X, \cdot) עם 8 איברים כך שלא קיימת חבורה המכילה את (X, \cdot) כתת מבנה.
ב. נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n$. הוכיחו שבמונואיד $Map(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ איבר f הוא הפיך רק מצד אחד.
ג. הוכיחו את משפט Euler על החזקות ובאמצעות המשפט פתרו את המשוואה $127^{301}x \equiv 2011 \pmod{99}$.

4. א. הראו שחבורה סופית היא מסדר זוגי אם ורק אם קיים בה איבר מסדר 2.
 ב. מצאו את כל המונומורפיזמים $f: U_{10} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
 ג. הוכיחו שסכום ישר $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ הוא חבורה ציקלית אם ורק אם $(m, n) = 1$.

5. א. חבורה S_6 פועלת מעל חבורה A_6 על ידי הצמדות. נמקו מדוע הפעולה מוגדרת היטב ומצאו את מספר המסלולים של הפעולה $S_6 \times A_6 \rightarrow A_6$.
 ב. כמה איברים מתחלפים עם $a = (3, 5, 1, 6)$ בחבורה S_8 ?
 ג. תהא G חבורה מסדר 28. הוכיחו:
 (a) קיימת תת חבורה 7-סילו נורמלית.
 (b) אם G לא אבלית אזי $|G'| = 7$.

- (c) אם G לא אבלית ויש לה תת חבורה נורמלית מסדר 2, אזי $G/Z(G) \cong D_7$.

שאלת הבנוס: (5 נקודות)

נניח $F(a, b)$ מסמן חבורה חופשית מעל קבוצה $\{a, b\}$. הוכיחו שלכל חבורה סופית G קיימת ת"ח $X \leq F(a, b)$ ות"ח נורמלית $X \triangleleft H$ כך ש G איזומורפית ל X/H .
 הוכיחו גם שקיימת חבורה סופית G כך שהיא לא איזומורפית לחבורת מנה של $F(a, b)$.

😊 **בהצלחה ושנה טובה !**