

### תרגיל 7 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. תהי  $K/F$  הרחבה ממימד 2 (של שדות ממאפיין שונה מ 2). חשבו את  $\text{Gal}(K/F)$ .  
רמז: הוכיחו קודם כי  $K = F(\sqrt{\alpha})$  עבור  $\alpha \in F$  כלשהוא.

2. יהיו  $K_1, K_2$  שתי הרחבות של  $F$  כך שקיים איזומורפיזם  $\psi : K_1 \rightarrow K_2$  המקיים  $\psi(F) = F$ . הוכיחו כי

$$\text{Gal}(K_1/F) \cong \text{Gal}(K_2/F)$$

3. מצאו את:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \quad (\text{א})$$

(ב) חשבו את חבורת גלואה של ההרחבה הנ"ל.

4. יהי  $f(x) \in F[x]$  פולינום ספרבילי עם שדה פיצול  $E$ . הוכיחו כי  $\text{Gal}(E/F)$  פועלת טרנזיטיבית על שורשי  $f(x)$  אם ורק אם  $f(x)$  הוא אי פריק.  
תזכורת: פעולה של חבורה  $G$  על קבוצה  $X$  היא טרנזיטיבית אם לכל  $x, y \in X$  קיים  $g \in G$  כך ש  $gx = y$ . (במילים אחרות, אם קיים רק מסלול אחד) הערה: את אחד מהכיוונים הוכחנו כבר בכיתה, עבור כיוון זה אתם רק צריכים למצוא את המשפט הרלוונטי ולהשתמש בו.