פתרון תרגיל 1

שאלה1:

1. קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר הקבוצה $X = \{a \in \mathbb{C} \,|\, a^n = 1\}$ עם הפעולה של כפל רגיל של מספרים מרוכבים.
פתרון : חבורה עם היחידה 1 של המספרים המרוכבים. סגירות: עבור $a, b \in X$ מתקיים כי $a^n = b^n = 1$ ולכן $(ab)^n = a^n b^n = 1 \cdot 1 = 1$ ולכן $ab \in X$. בנוסף אם $a \in X$ אזי $a \neq 0$ (כי $0^n \neq 1$) ולכן קיים לו הופכי $a^{-1} \in \mathbb{C}$ נראה כי $a^{-1} \in X$ שזה מוכיח שלכל איבר ב X יש הופכי ולכן X חבורה. אכן, $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} =$ $1^{-1} = 1$.

2. קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n > 1$, כלומר $\mathbb{F}^{n \times n}$ עם פעולת כפל מטריצות
פתרון : מונואיד, עם מטריצת היחידה כאיבר היחידה. לא חבורה כי למטריצות לא הפיכות אין הופכי.

3. יהא $\mathbb{F}$ שדה. אזי הקבוצה $G = \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \backslash \{0\}$ עם הכפל של השדה.
פתרון : זוהי חבורה. יש סגירות כי כפל של 2 איברים שונים מאפס תמיד שונה מאפס. היחידה היא $1_{\mathbb{F}}$ של השדה. עבור $x \in G$ קיים לו הופכי לפי הגדרת השדה (x שונה מאפס)

4. המטריצות $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | 0 < a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
פתרון : זוהי חבורה. היחידה היא מטריצת היחידה $I_2 \in G$. עבור מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G$ ההופכית שלה (היא קיימת כי הדט' שונה מאפס..) היא $\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

5. השלמים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה $a * b = a^b$
פתרון : זה לא אגודה כי $2 = 2 * 1 = 2 * (1 * 2) \neq (2 * 1) * 2 = 2 * 2 = 4$

6. תת קבוצה של הפולינומים $X = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|p(1) = 0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.
פתרון : זה חבורה. כי מרחב וקטורי (או למתעקשים ת"מ)

7. הטבעיים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה מקסימום $a * b = \max\{a, b\}$
פתרון : זה מונואיד. איבר היחידה הוא 1

8. קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים

$$G = \{ (a, b) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a < b,\, a.b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \} \cup \{\emptyset\}$$

עם פעולת חיתוך קבוצות.
פתרון : זה מונואיד. איבר היחידה הוא $\mathbb{R}$

9. תת קבוצה של המטריצות $G = \{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
פתרון : זה אגודה. היחידות ימניות הן מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אין יחידות שמאליות.

10. תת קבוצה של מטריצות משולשיות $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ $G =$ עם כפל מטריצות רגיל.
פתרון : זה אגודה. צורה סכמטית של כפל היא

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אין יחידה.

שאלה 2:

- סגירות: ברור ש $a*b\in\mathbb{R}$ אבל צריך להראות ש $a*b\neq -1$. נניח בשלילה ש $a*b=a+b+ab=-1$ נעביר אגף ונקבל $a(1+b)=-1-b$. נצמצם את $1+b$ (מותר כי $b\neq -1$) ונשאר לנו $a=-1$ וזו סתירה.
- אסוציאטיביות: מצד אחד
$(a*b)*c=(a+b+ab)*c=a+b+ab+c+(a+b+ab)c$
ומצד שני $a*(b*c)=a*(b+c+bc)=a+b+c+bc+a(b+c+bc)$.
ואפשר לראות שאלו ביטויים זהים.
- אדיש: נחפש איבר x כך שלכל מספר $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ יתקיים $x*a=a$. כלומר $x+a+xa=a$ נצמצם a ונקבל $x(1+a)=0$. $1+a\neq 0$ כי $a\neq -1$ ולכן בהכרח $x=0$ הוא האדיש שחיפשנו.
- הופכי: נקח $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ונחפש לו מספר y כך ש $a*y=0$. כלומר נפתור עבור y את $a+y+ay=0$. נקבל $y=\dfrac{-a}{1+a}$ (שוב, מותר לחלק כי $a\neq -1$).
אם כן מצאנו $a^{-1}=\dfrac{-a}{1+a}$ ללא הגבלה על a ולכן כל איבר הוא הפיך.
- אבליות: $a*b=a+b+ab=b+a+ba=b*a$.

שאלה 3:

פתרון : לא חילופית, למשל

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ואילו

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\ det(A)=a^2+b^2\neq 0\right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

פתרון : מוגדרות

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

כאשר $x=aa'-bb', y=ab'+ba'$

כעת

$$det(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix})=det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot det\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\neq 0$$

כמכפלה של שני מספרים שונים מאפס.

קיבוציות־ נובע מקיבוציות של מכפלת מטריצות

איבר היחידה־ $I\in G$ (אם ניקח $a=1,b=0$)

הופכי: יהא $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ אזי מחישוב ישיר נקבל כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

כאשר $x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$ ובנוסף

$$det\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} \neq 0$$

ולכן ההופכי שייך ל G.

בנוסף, החבורה חילופית כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix}$$

ששווה ל

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a-b'b & a'b+b'a \\ -b'a-a'b & -b'b+a'a \end{pmatrix}$$

שאלה 4:

הוכיחו שחבורה G היא אבלית אם ורק אם לכל $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = a^2b^2$.

$\Leftarrow$אם G אבלית אז לכל $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$.

$\Longrightarrow$ יהיו $a,b \in G$, אזי לפי ההנחה $(ab)^2 = a^2b^2$ כלומר $abab = aabb$ נכפול בa^{-1} משמאל ובb^{-1} מימין ונקבל: $ba = ab$. ולכן החבורה אבלית.

שאלה 5:

מצאו את חבורת האיברים ההפיכים של $\mathbb{Z}_6$ ושל $\mathbb{Z}_7$.

רושמים את לוחות הכפל ומקבלים: $U(\mathbb{Z}_6) = \{1,5\}$ ו- $U(\mathbb{Z}_7) = \{1,2,3,4,5,6\}$.

שאלה 6: פתרון: $a = (1\,6)(2\,5)(3\,4), b = (1\,2)(4\,5)(3\,6)$

שאלה 7:

פתרון: מכיוון שהצלחנו לפרק אותם למחזורים זרים מאורך שניים יתקיים $b = b^{-1}$ $a = a^{-1}$.

ואז : $a^2 = b^2 = e$ $bab^{-1} = bab = (1\,4)(5\,6)(3\,2)$ $ab = (1\,5\,3)(2\,6\,4)$

שאלה 8: א+ב:

פתרון: מתקיים כי $\sigma^{-1}=\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}$ כי $\tau_1\cdots\tau_m\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}=id$. בנוסף, המספרים המופיעים ב τ_i הם אותם מספרים המופיעים ב τ_i^{-1} ולכן המחזורים $\tau_m^{-1},\ldots,\tau_1^{-1}$ זרים ולכן מתחלפים. ומכאן נקבל

$$\sigma^{-1}=\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}=\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$$

בשיקול דומה, כיוון ש $\tau_1,\ldots,\tau_m$ זרים הם מתחלפים ולכן אפשר לקבץ אותם. כלומר

$$\sigma^k=(\tau_1\cdots\tau_m)(\tau_1\cdots\tau_m)\cdots(\tau_1\cdots\tau_m)=(\tau_1\cdots\tau_1)(\tau_2\cdots\tau_2)\cdots(\tau_m\cdots\tau_m)=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$$

ג: פתרון: נתסכל על $(1,2,3)=(1,2)(2,3)\in S_3$ מתקיים

$$(1,2,3)^{-1}=(3,2,1)\neq(1,2)^{-1}(2,3)^{-1}=(1,2)(2,3)=(1,2,3)$$

וגם

$$(1,2,3)^2=(1,3,2)\neq(1,2)^2(2,3)^2=id$$

ד:

פתרון: מספיק שהאברים $x_1,x_2,\ldots x_m$ יתחלפו זה עם זה.

עבור הסעיף השני, זה מיידי.

עבור הסעיף הראשון, נראה כי אם $x_1,x_2,\ldots x_m$ מתחלפים זה עם זה אז גם ההופכים. אכן אם $x_ix_j=x_jx_i$ אז אם נהפוך את שני הצדדיים נקבל

$$x_j^{-1}x_i^{-1}=(x_ix_j)^{-1}=(x_jx_i)^{-1}=x_i^{-1}x_j^{-1}$$

שאלה 9:

(א) $(135)x=(12)(245)$

נחשב את ההופכי $(135)^{-1}=(531)$

נכפול בו משמאל ונקבל: $x=(531)(12)(245)=(1243)$

(ב) $(153)x(42)=(13)(245)$

נכפול ב $(42)^{-1}=(42)$ מימין: $(153)x=(13)(245)(42)$,

ונכפול ב $(153)^{-1}=(351)$ משמאל: $x=(351)(13)(245)(42)=(152)$.

שאלה 10:

(א) אם $G_1\times G_2$ ציקלית אז גם G_2 וגם G_1 ציקלית.

פתרון: נכון. נניח (g_1,g_2) יוצר. אזי - טענה: g_i יוצר של G_i. נוכיח עבור g_1:

יהא $a\in G_1$ אזי קיים n כך ש $(a,e)=(g_1,g_2)^n=(g_1^n,g_2^n)$ אזי $g_1^n=a$.

(ב) אם G_1 וגם G_2ציקליות אז $G_1\times G_2$ ציקלית.

פתרון: לא נכון. $\mathbb{Z}_n$ ציקלית (1 יוצר) אבל ראינו כי $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית

שאלה 11:

(א) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

פתרון: נניח כשהיא ציקלית אזי קיים $\langle(a,b)\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש $\langle(a,b)\rangle=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

אזי קיים n שלם כך ש $(na,nb)=n(a,b)=(1,0)$ ולכן $n=a=\pm1$

מנימוק דומה $b=\pm1$ ולכן לכל n שלם מתקיים

$$n(a,b)=(\pm n,\pm n)\neq(2,3)$$

(ב) $\mathbb{Q}$

פתרון: נניח שציקלית. אזי $\mathbb{Q}=\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle$ עבור a,b שלמים. יהא p ראשוני שאינו מחלק את b אזי $\frac{1}{p}\notin\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle$. הוכחה: אחרת קיים n כך ש $\frac{1}{p}=n\frac{a}{b}=\frac{na}{b}$ ולכן $b=nap$ ומכאן ש p מחלק את b. סתירה.