שיעורי בית 1

27 באוקטובר 2015

1. הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א)
$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(ב)
$$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix}$$

2. חשבו: ab, bab^{-1}, b^2, a^2

3. תהא $\sigma\in S_n$. ותהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

(א) $\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$ לכל k טבעי.

(ג) הראה שהשיוויניות לעיל לא מתקיימים בהכרח בחבורה כללית. כלומר: תהא G חבורה. ויהא $g=x_1\cdots x_m\in G$ מצא דוגמא המקיימות

i. $g^{-1}\neq x_1^{-1}\cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k\neq x_1^k\cdots x_m^k$

(ד) מצא את התנאים ששיוויונות אלו כן יתקיימו, כלומר שכן מתקיים

i. $g^{-1}=x_1^{-1}\cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k=x_1^k\cdots x_m^k$

4. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1, i_2, \ldots i_m) \in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא

$$\sigma\left(i_1, i_2, \ldots i_m\right)\sigma^{-1} = \left(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m)\right)$$

5. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ כך שכל $\sigma \in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
כלומר $\sigma = \prod_{i=1}^{N} \tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i \in \left\{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\right\}$.
אנחנו נעבוד עם $\sigma_1 = (1, 2, 3, \ldots, n)\,, \sigma_2 = (1, 2)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1, i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1, σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 4 יכול להיות לעזר

(ב) הראה שכל חילוף (i, j) ניתן להביעו בעזרת $\left\{(1, k)\right\}_{k>2}$

(ג) הוכח את הטענה.