

# אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 7

16 בינואר 2021

1. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

(א)  $\sin(1 - i)$

(ב)  $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6})$

(ג)  $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2})$

(ד)  $\cos(i)$

**פתרון:**

א.  $\sin(1 - i) = \frac{e^{i(1-i)} - e^{-i(1-i)}}{2i} = \frac{e^{1+i} - e^{-1-i}}{2i} = \frac{e^1 \text{cis} 1 - e^{-1} \text{cis}(-1)}{2i} = \frac{e(\cos 1 + i \sin 1) - e^{-1}(\cos(-1) + i \sin(-1))}{2i}$  כעת

נקבץ ממשיים ומדומים, ניזכר ש- $\sin(-x) = -\sin x$ ,  $\cos(-x) = \cos x$ , וניזכר ש- $\frac{1}{i} = -i$  (מוזמנים גם לעשות כפל

בצמוד של המכנה): לכן נקבל:  $\sin 1 \frac{e+e^{-1}}{2} + \cos 1 \frac{e^{-1}-e}{2} i$

ב.  $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) = \frac{e^{i \cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}} + e^{-i \cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{2\text{cis}\frac{4\pi}{6}} + e^{2\text{cis}\frac{10\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{-1+\sqrt{3}i} + e^{1-\sqrt{3}i}}{2} = \frac{e^{-1} \text{cis}\sqrt{3} + e \text{cis}(-\sqrt{3})}{2}$  נדלג ישר לקיבוץ

איברים דומים ולצורה הקרטזית:  $\cos \sqrt{3} \frac{e+e^{-1}}{2} + \sin \sqrt{3} \frac{e^{-1}-e}{2} i$

ג.  $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{i \cdot 2i} - e^{-i \cdot 2i}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^2}{2i} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} i$

ד.  $\cos(i) = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2}$  (כאשר המעבר האחרון נובע מהעובדה  $\frac{1}{i} = -i$ )

2. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

(א)  $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)}$

(ב)  $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$

(ג)  $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

**פתרון:**

א.  $\sin(\bar{z}) = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}$  כעת, כיון שראינו בתרגול ש  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$  נוכל להמשיך:  $\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = \overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{-2i}}$  . כדי

שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום:  $2i = \overline{-2i}$  ונקבל:  $\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i} = \overline{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)} = \overline{\sin(z)}$

ב. באופן דומה:  $\cos(\bar{z}) = \frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \overline{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \overline{\cos(z)}$

ג. נפתח את צד ימין:

$$\cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} =$$

שימו לב שהמכנה בשני המקרים הוא 4, ושהסימן באמצע הופך לפלוס כיון שבמכנה הימני יש בעצם -4. כלומר מקבלים:

$$= \frac{1}{4} ((e^{iz} + e^{-iz}) \cdot (e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz}) \cdot (e^{iw} - e^{-iw})) =$$

$$= \frac{1}{4} (e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{-i(z-w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z-w)} + e^{-i(z+w)}) =$$

כעת נצמצם את אלה שמשנים סימן ונסכום את שווי הסימן, ונקבל:

$$= \frac{1}{4} \left( 2e^{i(z+w)} + 2e^{-i(z+w)} \right) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)$$

3. חשבו את כל האפשרויות וכתבו מהי התשובה בענף העיקרי:

(א)  $(e \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^{1-i}$

(ב)  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

(ג)  $\left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

פתרון:

א. נתחיל מהתוצאה הכללית:  $(e \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^{1-i} = e^{(1-i) \operatorname{Lnc}(e \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})}$ . נחשב את הלוגריתם:

$$e^x \operatorname{cis} y = e^{x+yi} = e \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} e^x = e \Rightarrow x = \ln e = 1 \\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

(שימו לב שהענף העיקרי מתקבל עבור  $k=0$ , נצטרך להמשיך):

$$e^{(1-i) \operatorname{Lnc}(e \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})} = e^{(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}$$

נחשב את המעריך:

$$(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)) = 1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k + i(-1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

ונקבל:

$$e^{(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))} = e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k+i(-1+\frac{\pi}{4}+2\pi k)} = e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k} \operatorname{cis}(-1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

הפתרון הכללי הוא:

$$e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k} \operatorname{cis}(-1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

הפתרון העיקרי מתקבל עבור  $k=0$  והוא:

$$e^{1+\frac{\pi}{4}} \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4} - 1)$$

ב.  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = e^{(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) \operatorname{Lnc}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)}$ . נחשב את הלוגריתם:

$$e^x \operatorname{cis} y = e^{x+yi} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$$

$$\begin{cases} e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

שימו לב שהענף העיקרי מתקבל עבור  $k = -1$ . נמשיך:

$$e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right)i}$$

נחשב את המעריך:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right) i = -\left(\frac{11\pi}{12} + \pi k\right) + \left(-\frac{11\pi}{4\sqrt{3}} - \sqrt{3}\pi k\right) i$$

ונקבל:

$$e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)i} = e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right)i} = e^{-\left(\frac{11\pi}{12} + \pi k\right)} \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{4\sqrt{3}} - \sqrt{3}\pi k\right)$$

הפתרון העיקרי מתקבל עבור  $k = -1$  והוא:

$$e^{\frac{\pi}{12}} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\right)$$

ג.  $e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \operatorname{Ln}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)i}$ . נחשב את הלוגריתם:

$$e^x \operatorname{cis} y = e^{x+yi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

שימו לב שהענף העיקרי מתקבל עבור  $k = 0$ . נמשיך:

$$e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \operatorname{Ln}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)i}$$

נחשב את המעריך:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) i = \left(\frac{5\pi}{12} + \pi k\right) + \left(\frac{5\pi}{4\sqrt{3}} + \sqrt{3}\pi k\right) i$$

ונקבל:

$$e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)i} = e^{\left(\frac{5\pi}{12} + \pi k\right) + \left(\frac{5\pi}{4\sqrt{3}} + \sqrt{3}\pi k\right)i} = e^{\left(\frac{5\pi}{12} + \pi k\right)} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4\sqrt{3}} + \sqrt{3}\pi k\right)$$

הפתרון העיקרי מתקבל עבור  $k = 0$  והוא:

$$e^{\frac{5\pi}{12}} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4\sqrt{3}}\right)$$

בהצלחה!