תרגיל בית 6 ־ טופולוגיה

3 במאי 2017

1. קבעו לגבי כל אחת מהפונצקיות הבאות אם היא פתוחה/סגורה/רציפה:

(א) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(ב) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(ג) $f_3 : X \to \mathbb{R}$ עבור $X = [2,3] \cup [4,5)$ המוגדרת ע"י

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in [2,3] \\ x & x \in [4,5) \end{cases}$$

2. יהא X מ"ט. יהא $A \subseteq X$ תת מרחב ותהא $S \subseteq A$ תת קבוצה אזי: S סגורה ב A $\Longleftrightarrow$ קיימת $Q \subseteq X$ סגורה ב X כך ש $S = Q \cap A$

3. הוכיחו

(א) כל פונקציה ממ"ט דיסקרטי לכל מ"ט אחר היא פונקציה רציפה.

(ב) כל פונקציה ממ"ט כל שהוא למ"ט הטיריאלי היא פונקציה רציפה.

(ג) תהא $f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ רציפה ונניח כי $\tau_1 \subseteq \tau_1', \tau_2' \subseteq \tau_2$. הוכיחו כי $f : (X,\tau_1') \to (Y,\tau_2)\,, f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2')$ רציפות.

4. תהא $f : X \to Y$ פונקציה בין שתי מ"ט. נסתכל על $f(X)$ כתמ"ט של Y.

(א) הוכיחו שאם f פתוחה [או סגורה] כפונקציה מ X ל Y אזי היא פתוחה [או סגורה] כפונקציה מ X ל $f(X)$.

(ב) הראו ע"י דוגמא נגדית שמהעובדה כי f פתוחה [או סגורה]כפונקציה מ X ל $f(X)$ לא נובע כי f פתוחה [או סגורה] כפונקציה מ X ל Y.

5. יהיו $m, c \in \mathbb{R}$ שני מספרים. נגדיר תת מרחב של $\mathbb{R}^2$ כך

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = mx + c\right\}.$$

הוכיחו כי X הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$.

6. יהא $(X, \| * \|)$ מרחב נורמי $a \in X, c \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי הפונקציות הבאות רציפות:

(א) העתקת הנורמה: $f : (X, \| * \|) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = \|x\|$ כאשר שני המרחבים הם מרחבים מטריים.

(ב) הזזה: $g : (X, \| * \|) \to (X, \| * \|)$ המוגדרת ע"י $g(x) = x + a$

(ג) כפל בסקלאר: $h : (X, \| * \|) \to (X, \| * \|)$ המוגדרת ע"י $h(x) = cx$

(ד) הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a, \epsilon)$ (עבור $a \in X$ ו $0 < \epsilon$) הומיאומורפי לכדור $B(0, 1)$