תרגיל בית 4

שאלה 1

מצא פתרון פרטי למשוואות הבאות בעזרת שיטת וריאציית הפרמטרים:

א. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$.

ב. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

ג. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נמצא תחילה פתרון למשוואה ההומוגנית $y''+y=0$ ונקבל $y=c_1\sin x+c_2\cos x$.

הפתרון של המשוואה הלא הומוגנית הוא מהצורה

$$y=c_1(x)\sin x+c_2(x)\cos x$$

$$y'=c_1'(x)\sin x+c_1(x)\cos x+c_2'(x)\cos x-c_2(x)\sin x$$

יש אינסוף אפשרויות עבור $c_1(x),c_2(x)$ נבחר את האפשרות שמקיימת $c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=0$ ואז

$$y=c_1(x)\sin x+c_2(x)\cos x$$

$$y'=c_1(x)\cos x-c_2(x)\sin x$$

$$y''=c_1'(x)\cos x-c_1(x)\sin x-c_2'(x)\sin x-c_2(x)\cos x$$

נציב במשוואה $y''+y=\frac{1}{\sin x}$ ונקבל $\begin{cases} c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=0 \\ c_1'(x)\cos x-c_2'(x)\sin x=\frac{1}{\sin x} \end{cases}$

נכפול את המשוואה הראשונה ב $\sin x$ את המשוואה השנייה ב $\cos x$ נחבר ונקבל $c_1'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}\Leftarrow c_1(x)=\ln|\sin x|$ נציב $c_1'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ במשוואה הראשונה ונקבל $c_2'(x)=-1 \Leftarrow c_2(x)=-x$.

קיבלנו שהפתרון הפרטי של המשוואה הוא $y_p=\ln|\sin x|\cdot\sin x-x\cos x$ ואז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y=c_1\sin x+c_2\cos x+\ln|\sin x|\cdot\sin x-x\cos x$.

סעיף ב

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית $y''+4y'+4y=0$.

נפתור את המשוואה $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Leftarrow (\lambda+2)^2=0$ ואז הפתרון הוא $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$.

הפתרון הפרטי הוא מהצורה $y=c_1(x)e^{-2x}+c_2(x)xe^{-2x}$. נגזור ונקבל $y'=c_1'(x)e^{-2x}-2c_1(x)e^{-2x}+c_2'(x)xe^{-2x}+c_2(x)e^{-2x}-2c_2(x)xe^{-2x}$.

ניקח פתרון פרטי שמקיים את המשוואה $c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)xe^{-2x}=0$

ואז $y'=-2c_1(x)e^{-2x}+c_2(x)e^{-2x}-2c_2(x)xe^{-2x}$. נגזור פעם שנייה ונקבל

$$y''=-2c_1'(x)e^{-2x}+4c_1(x)e^{-2x}+c_2'(x)e^{-2x}-2c_2(x)e^{-2x}-2c_2'(x)xe^{-2x}+4c_2(x)xe^{-2x}-2c_2(x)e^{-2x}$$

נציב במשוואה $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$ ונקבל

$-2c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)e^{-2x}-2c_2'(x)xe^{-2x}=e^{-2x}\ln x$ נכפיל פי 2 את המשוואה

$c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)xe^{-2x}=0$ ונחבר עם המשוואה הנ"ל.

$c_2'(x)e^{-2x}=e^{-2x}\ln x\Rightarrow c_2'(x)=\ln x\Rightarrow c_2(x)=x\ln x-x$.

נציב $c_2'(x)=\ln x$ במשוואה $c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)xe^{-2x}=0$ ונקבל

$c_1'(x)e^{-2x}+x\ln xe^{-2x}=0\Rightarrow c_1'(x)=-x\ln x\Rightarrow c_1(x)=-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}$.

הפתרון הפרטי הוא

$$y_p=-\frac{x^2e^{-2x}\ln x}{2}+\frac{x^2e^{-2x}}{4}+x^2\ln xe^{-2x}-x^2e^{-2x}$$

$$y_p=\frac{x^2e^{-2x}\ln x}{2}-\frac{3x^2e^{-2x}}{4}$$

הפתרון הכללי הוא $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\frac{x^2e^{-2x}\ln x}{2}-\frac{3x^2e^{-2x}}{4}$

<u>סעיף ג</u>

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית $y''-2y'+y=0$ ונקבל $y=c_1e^x+c_2xe^x$.

הפתרון הפרטי הוא מהצורה

$y=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x\Rightarrow y'=c_1'(x)e^x+c_1(x)e^x+c_2'(x)xe^x+c_2(x)xe^x+c_2(x)e^x$.

נבחר פתרון שמקיים את המשוואה $c_1'(x)e^x+c_2'(x)xe^x=0$ ונקבל ש

$y'=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x+c_2(x)e^x$. נגזור שוב ונקבל

$y''=c_1'(x)e^x+c_1(x)e^x+c_2'(x)xe^x+c_2(x)xe^x+2c_2(x)e^x+c_2'(x)e^x$.

נציב במשוואה הראשונה ונקבל $c_1'(x)e^x+c_2'(x)xe^x+c_2'(x)e^x=\frac{e^x}{x}$, נחסר מהמשוואה

$c_1'(x)e^x+c_2'(x)xe^x=0$ ואז $c_2'(x)e^x=\frac{e^x}{x}\Rightarrow c_2'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow c_2(x)=\ln x$.

נציב $c_2'(x)=\frac{1}{x}$ במשוואה $c_1'(x)e^x+c_2'(x)xe^x=0$ ונקבל $c_1'(x)=-1\Rightarrow c_1(x)=-x$.

הפתרון הפרטי הוא $y=-xe^x+x\ln xe^x$. הפתרון הכללי הוא

$$y=c_1e^x+c_2xe^x-xe^x+x\ln xe^x$$

<u>שאלה 2</u>

פתור את משוואות אוילר הבאות:

א. $x^2y''+2xy'-2y=0$.

ב. $x^2y''-xy'+y=0$.

ג. $x^2y''+xy'+y=0$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

נניח שהפתרון הוא מהצורה $y=x^r\Rightarrow y'=rx^{r-1}\Rightarrow y''=(r-1)rx^{r-2}$.

נציב במשוואה ונקבל $(r-1)rx^r+2rx^r-2x^r=0\Rightarrow x^r(r^2+r-2)=0$.

$r_1 = 1, r_2 = -2$. הפתרון הוא $y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2}$

<u>סעיף ב</u>

נניח שהפתרון הוא מהצורה $y = x^r \Leftarrow y' = rx^{r-1} \Leftarrow y'' = (r-1)rx^{r-2}$.

נציב במשוואה ונקבל $0 = x^r + rx^r - (r-1)rx^r \Leftarrow 0 = x^r (r^2 - 2r + 1)$.

$r_1 = 1, r_2 = 1$. הפתרון הוא $y = c_1 x + c_2 x \ln x$

<u>סעיף ג</u>

נניח שהפתרון הוא מהצורה $y = x^r \Leftarrow y' = rx^{r-1} \Leftarrow y'' = (r-1)rx^{r-2}$.

נציב במשוואה ונקבל $0 = x^r + rx^r + (r-1)rx^r \Leftarrow 0 = x^r (r^2 + 1)$.

$r_1 = i, r_2 = -i$. הפתרון הוא $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$.

<u>שאלה 3</u>

מצא פתרון כללי של כל אחת מהמערכות ההומוגניות הבאות:

(א) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 8x_1 - 6x_2 \end{cases}$,
(ב) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$,

(ג) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 \end{cases}$,
(ד) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 \end{cases}$,

(ה) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 8x_1 - 4x_2 \end{cases}$,
(ו) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

(א) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 8x_1 - 6x_2 \end{cases}$,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + 2\lambda = 0,\ \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = -2,\ \begin{cases} 6\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 8\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_2 = 2\alpha_1,\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t},$$

$$\lambda_2 = 0,\ \begin{cases} 4\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 8\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_2 = \frac{4}{3}\alpha_1,\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ב) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = -3,\ \begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_2 = -4\alpha_1,\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t},$$

$$\lambda_2 = 2,\ \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_2 = \alpha_1,\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

ג) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 \end{cases}$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,\ \lambda_1 = -1+i,\ \lambda_2 = -1-i$$

$$\lambda_1 = -1+i,\ \begin{cases} (2-i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (-2-i)\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_1 = (2+i)\alpha_2,\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+i)t},$$

$$\lambda_2 = -1-i,\ \begin{cases} (2+i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (-2+i)\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_1 = (2-i)\alpha_2,\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-i)t},$$

$$\tilde{x}^{(1)} = \frac{x^{(1)} + x^{(2)}}{2} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-t},\ \tilde{x}^{(2)} = \frac{x^{(1)} - x^{(2)}}{2i} = \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

(ד) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 \end{cases}$,

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$,

$\lambda_1 = -3$, $\begin{cases} 4\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$, $\alpha_2 = \alpha_1$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$,

$\lambda_2 = -3$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} e^{-3t}$, $\dfrac{dx^{(2)}}{dt} = \begin{pmatrix} a_1 - 3a_1 t - 3b_1 \\ a_2 - 3a_2 t - 3b_2 \end{pmatrix} e^{-3t}$,

$$\begin{cases} a_1 - 3a_1 t - 3b_1 = a_1 t + b_1 - 4a_2 t - 4b_2 \\ a_2 - 3a_2 t - 3b_2 = 4a_1 t + 4b_1 - 7a_2 t - 7b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a_1 = a_1 - 4a_2 \\ -3a_2 = 4a_1 - 7a_2 \\ a_1 - 3b_1 = b_1 - 4b_2 \\ a_2 - 3b_2 = 4b_1 - 7b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ 4b_1 - 4b_2 = a_1 \end{cases}$$

$b_1 = 1, b_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 4$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ 4t \end{pmatrix} e^{-3t}$,

$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 4t+1 \\ 4t \end{pmatrix} e^{-3t}$