לינארית 2 - תרגיל 5

שאלה 1. *משפט ההצגה של ריס: מצאו וקטור* $v\in\mathbb{R}^3$ *כך שמתקיים*

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x-2y+z=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},v\right\rangle$$

Solution. נרשום: $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ונקח את הבסיס האו"נ הסטנדרטי. אזי דרוש לנו ש

$$\begin{aligned}1&=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},v\right\rangle=a\\-2&=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},v\right\rangle=b\\1&=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},v\right\rangle=c\end{aligned}$$

כלומר $v=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

שאלה 2. *נתון בסיס של* $\mathbb{C}^3$ $\{v_1=(i,i,0),v_2=(i,-i,i),v_3=(0,0,-1)\}$. *ונתונה העתקה לינארית* $\varphi:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ *לפי*

$$\begin{aligned}\varphi(v_1)&=(i,0)\\\varphi(v_2)&=(i,i)\\\varphi(v_3)&=(i,-i)\end{aligned}$$

בצעו גרם-שמידט על וקטורי הבסיס. היעזרו בתהליך וחשבו את המטריצה המייצגת של ההעתקה הצמודה φ^* *ביחס לבסיס האורתונורמלי שקיבלתם של* $\mathbb{C}^3$ *והבסיס הסטנדרטי של* $\mathbb{C}^2$.

Solution. נבצע גרם שמידט:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\overbrace{\langle v_2, w_1 \rangle}^{0}}{\|w_1\|^2} w_1 = v_2$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = v_3 - \frac{i}{3} w_2 = (1/3, -1/3, -2/3)$$

ואחרי נירמול נקבל $\hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,i,0), \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,-i,i), \hat{w}_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1/3, -1/3, -2/3)$.

כעת,

$$\varphi(\hat{w}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0)$$

$$\varphi(\hat{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi(v_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,i)$$

$$\varphi(\hat{w}_3) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \varphi\left(v_3 - \frac{i}{3} v_2\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left((i,-i) - \frac{i}{3}(i,i)\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(i + \frac{1}{3}, -i + \frac{1}{3}\right)$$

והמטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(i + \frac{1}{3}) \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(-i + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$

ולכן המטריצה המייצגת של φ^* היא $\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(-i + \frac{1}{3}) & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(i + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$.

שאלה 3. *נתבונן במרחב* $\mathbb{R}_2[x]$ *עם המכפלה הפנימית*

$$\langle p(x),q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

ויהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ *המוגדרת ע"י* $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_1x$.

1. *הראו שהיא לא צמודה לעצמה.*
2. *המטריצה המייצגת של* T *לפי הבסיס* $\{1,x,x^2\}$ *היא* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *שהיא כן צמודה לעצמה (כלומר, שווה למשוחלפת של עצמה). הסבירו בקצרה למה זה לא סתירה לכך ש* T *לא צמודה לעצמה.*

Solution.

1. נקח למשל $\langle T(1),x\rangle = \langle 1,T^*(x)\rangle \overset{?}{=} \langle 1,Tx\rangle$
אז מצד אחד $\langle T(1),x\rangle = \langle 0,x\rangle = 0$
ומצד שני $\langle 1,Tx\rangle = \langle 1,x\rangle = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$
קיבלנו שהם שונים ולכן לא יתכן שההעתקה צמודה לעצמה.
2. זה לא סתירה מכיוון שהבסיס $\{1,x,x^2\}$ איננו בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה הנתונה. למשל $\langle 1,x\rangle = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\neq 0$.

שאלה 4. *תהי* $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ *מטריצה צמודה לעצמה. הוכיחו כי* $\ker A = \ker A^2$.

Solution. ברור ש $\ker A\subseteq \ker A^2$ כי אם $Av=0$ אז $A^2v=AAv=A0=0$ ..

נקח $v\in\ker A^2$ אזי

$$\|Av\|^2 = \langle Av,Av\rangle = \langle A^*Av,v\rangle = \langle A^2v,v\rangle = \langle 0,v\rangle = 0$$

ולכן $Av=0$ כלומר ש $v\in\ker A$.

שאלה 5. *הוכיחו שאין העתקה צמודה לעצמה* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *כך ש*

$$\begin{aligned} T(1,2,3) &= 0 \\ T(2,5,7) &= (2,5,7) \end{aligned}$$

רמז: ו"ע של ע"ע שונים צריכים להיות מאונכים.

Solution. מהנתונים ניתן לראות ש$(1,2,3)$ הוא ו"ע של ע"ע 0 ו$(2,5,7)$ הוא ו"ע של ע"ע 1 .

אם ההעתקה הייתה צמודה לעצמה אז ו"ע של ע"ע שונים הם מאונכים וצריך להיות ש $\langle (1,2,3),(2,5,7)\rangle = 0$
אבל זה לא כך. סתירה.

שאלה 6. *תהי* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *מטריצה אורתוגונלית. הוכיחו כי* $\det A = \pm 1$ *ושהמטריצה* $adj(A)$ *גם אורתוגונלית.*

Solution. A ממשית אורתוגונלית פירושו $A^{-1} = A^t$ ולכן $\det A^{-1} = \det A^t = \det A$ $\Leftarrow$ $\det A^2 = 1$ $\Leftarrow$ $\det A = \pm 1$.

כידוע $A \cdot adj(A) = \det(A)I$ ולכן $adj(A) = A^{-1}$ היא אורתוגונלית.