חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובבסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

פתרון 1- אי שוויונים ואינדוקציה

שאלה 1

הוכיחו את הטענה: אם $\left|x-\frac{a}{2}\right|<\frac{|a|}{2}$ אזי $|x-a|<|a|$.

פתרון

לפי אי שוויון המשולש והנתון:

$$|x-a|=\left|x-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right|\le\left|x-\frac{a}{2}\right|+\left|\frac{a}{2}\right|<\left|\frac{a}{2}\right|+\left|\frac{a}{2}\right|=|a|$$

שאלה 2

יהיו $x,y>0$ מספרים ממשיים. הוכיחו שמתקיים: $\frac{2xy}{x+y}\le\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$.

פתרון

נתחיל עם צד ימין. נעלה את שני האגפים בריבוע (מותר כי שניהם חיוביים) ונקבל שמספיק להוכיח את אי השוויון: $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$. זה שקול ל: $4xy\le x^2+2xy+y^2$ וזה שקול ל- $0\le x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ ולכן אי השוויון מתקיים.

צד שמאל. שוב נעלה בריבוע ונקבל שמספיק להוכיח: $\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2}\le xy$. נצמצם ב- xy (מדוע מותר?) ונקבל: $\frac{4xy}{(x+y)^2}\le 1$. לאחר מכנה משותף והעברת אגף מגיעים ל- $0\le x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

שאלה 3

מצאו את כל ערכי x הממשיים עבורם מתקיים אי השוויון:

א. $|2x^2-5x+2|<|x+1|$

ב. $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$

חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

נחלק לתחומים:

$x+1>0$ כאשר $x>-1$

$2x^2-5x+2>0$ פרבולה צוחקת עם שורשים 2 ו $\frac{1}{2}$, ולכן כאשר x $\frac{1}{2}>$ או $x>2$.

לכן יש שלושה תחומים:

1. $x+1>0$ וגם $2x^2-5x+2>0$ כאשר $x>2$ או $-1<x<\frac{1}{2}$

2. $x+1>0$ ו $2x^2-5x+2\le 0$ כאשר $\frac{1}{2}\le x\le 2$

3. $x+1\le 0$ ו $2x^2-5x+2\ge 0$ כאשר $x\le -1$

נפתור את אי השיוויון בתוך כל אחד מהתחומים:

1. $2x^2-5x+2<x+1$ לכן $2x^2-6x+1<0$ וזו פרבולה צוחקת עם שורשים $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$ ולכן אי השיוויון מתקיים עבור $\frac{3+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ ובתוך התחום $\frac{3-\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1}{2}$ או $2<x<\frac{3+\sqrt{7}}{2}$.

2. $-2x^2+5x-2<x+1$ ולכן $2x^2-4x+3>0$ זו פרבולה צוחקת ללא שורשים ולכן אי השיוויון מתקיים בתוך כל התחום, ולכן הפתרונות הם $\frac{1}{2}\le x\le 2$

3. $2x^2-5x+2<-x-1$ ולכן $2x^2-4x+3<0$ זו פרבולה צוחקת ללא שורשים ולכן אי השיוויון לא מתקיים כלל (כי הרי רוצים קטן מאפס, בניגוד לתחום הקודם בו רצינו גדול מאפס).

<u>תשובה סופית:</u> סה"כ הפתרונות הם $\frac{3+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{3-\sqrt{7}}{2}$

חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

<u>סעיף ב</u>

$$\left||x+1|-|x-1|\right|<1$$

שני האגפים חיוביים לכן מותר להעלות בריבוע, ואי השוויון שקול ל:

$(\left||x+1|-|x-1|\right|)^2<1^2$ אם"ם $(|x+1|-|x-1|)^2<1$ (כי $x^2=|x|^2$). אם"ם
$|x+1|^2+|x-1|^2-2|x+1||x-1|<1$ אם"ם $(x+1)^2+(x-1)^2-2|(x+1)(x-1)|<1$ אם"ם
$2x^2+2-2|(x+1)(x-1)|<1$ אם"ם $2x^2+1<2|(x^2-1)|$. כעת שני האגפים חיוביים, לכן
נעלה בריבוע את שניהם: $4x^4+4x^2+1<(2(x^2-1))^2=4x^4-8x^2+4$ אם"ם $12x^2<3$
אם"ם $x^2<\frac{1}{4}$ אם"ם $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

<u>תשובה סופית</u>: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו באינדוקציה את אי שוויון ברנולי (Bernoullli):

לכל מספר טבעי n ולכל מספר ממשי $a\geq -1$ מתקיים $(1+a)^n\geq 1+na$.

<u>פתרון</u>

בסיס האינדוקציה ($n=1$): מקבלים בשני האגפים $1+a$ לכן הטענה נכונה.

נניח נכונות עבור n כלומר ש $(1+a)^n\geq 1+na$ עבור $a\geq -1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$.
כלומר, צ"ל ש- $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)a$. עפ"י הנחת האינדוקציה ומהעובדה ש $a\geq -1$ נקבל ש:

$$(1+a)^{n+1}=(1+a)(1+a)^n\geq(1+a)(1+na)=1+a+na+na^2\geq 1+a+na=1+(n+1)a$$

והוכחנו את הטענה באינדוקציה.

הערות:

1)שימו לב שגם כש $a=-1$ מתקיים אי השוויון $(1+a)(1+a)^n\geq(1+a)(1+na)$ כי אז בשני האגפים יש אפס.

2) אי השוויון $1+a+na+na^2 \geq 1+a+na$ נובע מאי השוויון $na^2 \geq 0$ שמתקיים בהכרח (מדוע?).

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו כי לכל $x \neq 0$ מתקיים $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$. הראו שהשוויון מתקיים רק עבור $x = \pm 1$.

<u>פתרון</u>

מכיון ששני האגפים באי השוויון שצ"ל הם אי שליליים אז שקול להוכיח את אי השוויון $\left|x+\frac{1}{x}\right|^2 \geq 2^2$. שקול להוכיח: $x^2+2+\frac{1}{x^2} \geq 2^2$. נכפיל את אי השוויון ב- x^2 (מותר לעשות זאת כי בהכרח $x^2 > 0$ כי $x \neq 0$) ונקבל שמספיק להוכיח (מ"ל) $x^4+2x^2+1 \geq 4x^2$. מ"ל ש $x^4-2x^2+1 \geq 0$. אבל זה נכון כי $x^4-2x^2+1 = \left(x^2-1\right)^2 \geq 0$.

לגבי השוויו: מאי השוויון $x^4-2x^2+1 = \left(x^2-1\right)^2 \geq 0$ קל לראות שמתקיים שוויון אם ורק אם $x = \pm 1$.

בהצלחה!