פתרון תרגיל בית 8 - מופשטת

שאלה 1

תהא G חבורה ונתון שקיים $1\neq g\in G$ כך שמחלקת הצמידות שלו מכילה שני איברים. הוכיחו שקיימת ב-G תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

פתרון

ידוע שעבור פעולת ההצמדה של G על עצמה מתקיים $|conj(g)|=2$ ולכן $\left[G:C_G(g)\right]=2$ ולכן $C_G(g)\triangleleft G$.

מש"ל

שאלה 2

תהא G חבורה כך ש-$|G|=p^k$ עבור p ראשוני. תהא $H\triangleleft G$ כך ש-$|H|=p$. הוכיחו כי $H\subset Z(G)$.

פתרון

H חבורה מסדר p ולכן ציקלית. נרשום $H=\left\{e,a,a^2,\ldots,a^{p-1}\right\}$. מכיוון ש-$H\triangleleft G$ כל הצמודים של a שייכים ל-H ולכן לכל $g\in G$ קיים $1\leq i\leq p-1$ כך ש-$gag^{-1}=a^i\in H$ (שימו לב ש-e אינו צמוד ל-a) לכן מספר הצמודים השונים של a הוא לכל היותר $p-1$.

מצד שני, מספר הצמודים (סדר מחלקת הצמידות) מחלק את סדר החבורה ולכן הוא חזקה של p. זאת אומרת שהאפשרות היחידה היא שמספר הצמודים של a הוא 1. כלומר $a\in Z(G)$ ולכן $H\subset Z(G)$.

[$a\in Z(G)$ ולכן $a^i\in Z(G)$ בגלל הסגירות].

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

עבור $H \le G$ נגדיר את ה*מנרמל* (או ה*נורמליזטור*) של H ב-G:
$N(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$.

הוכיחו:

א) $N(H) \le G$ ו- $H \lhd G \Leftrightarrow N(H) = G$.

ב) $H \lhd N(H)$.

ג) אם $H \lhd K \le G$ אזי $K \le N(H)$.

ד) נתבונן ב-S_6 ובקבוצה הבאה: $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$.

1. הוכיחו ש-H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל-S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?
2. הוכיחו שב-$N(H)$ יש שתי תת-חבורות – K, L כך ששתיהן איזומורפיות ל-S_3 ו-$L \cap K = \{id\}$.

<u>פתרון</u>

א) $N(H) \le G$ **ו-** $H \lhd G \Leftrightarrow N(H) = G$**.**

נוכיח תחילה כי $N(H) \le G$. ברור ש-$N(H)$ אינה ריקה, שכן $1_G \in N(H)$. יהיו $a,b \in N(H)$. מתקיים: $(ab)H = a(bH) = a(Hb) = (aH)b = (Ha)b = H(ab)$ ולכן $ab \in N(H)$. כעת, יהי $a \in N(H)$. מתקיים: $(a^{-1})H = (aH)^{-1} = (Ha)^{-1} = H(a^{-1})$ ולכן $a^{-1} \in N(H)$.

נוכיח כעת את הטענה $H \lhd G \Leftrightarrow N(H) = G$. הכיוון הראשון טריוויאלי (שכן, אם $H \lhd G$ אזי $gH = Hg$ לכל $g \in G$). הכיוון השני טריוויאלי מהגדרת ת"ח נורמלית.

ב) $H \lhd N(H)$**.**

רואים מההגדרה כי $H \subseteq N(H)$ ולכן היא ת"ח. נותר להראות שהיא נורמלית.
קל לראות שלכל $a \in N(H)$ ולכל $h \in H$ מתקיים $aha^{-1} \in H$.

ג) אם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$.

מספיק להראות ש-K מוכלת ב-$N(H)$ (מדוע?). $H \triangleleft K$ ולכן <u>לכל</u> $k \in K$ מתקיים $kHk^{-1} = H$, ומהגדרת המנרמל רואים כי $k \in N(H)$. לכן, $K \subseteq N(H)$.

ד) נתבונן ב-S_6 ובקבוצה הבאה: $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$.

1. **הוכיחו ש-H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל-S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?**
   ההוכחה ש-H היא תת חבורה – פשוט לפי ההגדרה. H לא מזיזה את המספרים $2,4,6$ ולכן ניתן להסתכל על התמורות שלה כעל תמורות של המספרים $\{1,3,5\}$. לכן $H \cong S_3$. H אינה תת חבורה נורמלית ב-S_6, שכן תת חבורה נורמלית (בחבורת התמורות) צריכה להכיל את כל התמורות מאותו המבנה. עם זאת, $(1\,3\,5) \in H$, אך התמורה הצמודה לה לא נמצאת שם - $(1\,2\,4) \notin H$.

2. **הוכיחו שב-$N(H)$ יש שתי תת-חבורות – K, L כך ששתיהן איזומורפיות ל-S_3 ו-$L \cap K = \{id\}$.**
   החבורה הראשונה היא H עצמה (שכן היא תת חבורה של המנרמל שלה ואכן איזומורפית ל-S_3). החבורה השניה היא :
   $K = \{\sigma \in S_6 \ : \ \sigma(1) = 1, \sigma(3) = 3, \sigma(5) = 5\}$. מתקיים $K \cap H = \{id\}$. כמו כן, כל האיברים של K (פרט לתמורת הזהות) זרים לאיברי H ולכן מתקיים: <u>לכל</u> $k \in K$ $kH = Hk$ ולכן $K \leq N(H)$. קל לראות מדוע גם K איזומורפית ל-S_3.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

א) נניח ש-G היא חבורת מסדר p^k עבור p ראשוני ו-$k \geq 1$, וש-G פועלת על קבוצה עם n איברים כש-p לא מחלק את n. הוכיחו שקיימת נקודת שבת משותפת.

ב) הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה G הפועלת על קבוצה X כך ש-$|G| = |X| = 13$, בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת.

ג) נתונה פעולה $G \times X \to X$ כאשר $G := D_7$ וְ- $|X| = 19$. הוכיחו או הפריכו: לפעולה זו קיימת נקודת שבת משותפת.

<u>פתרון</u>

א) נתון $|G| = p^k, |X| = n$ ו- p לא מחלק את n. אם $\{x_1,...,x_t\}$ הם הנציגים של המסלולים אז: $n = \sum_{i=1}^{t} |orb(x_i)| = \sum_{i=1}^{t} \frac{|G|}{|stb(x_i)|}$. כלומר n הוא סכום גדלי המסלולים, המחלקים את $|G|$. המספרים הטבעיים שיכולים לעשות זאת הם : $\{1, p, p^2, ..., p^k\}$.כלומר, כל מסלול הוא מגודל p^i $(0 \le i \le k)$ ו-n הוא סכום הגדלים. לפיכך n הוא מהצורה: $n = a_0 + a_1 p + ... + a_k p^k$. כיוון ש-$p$ לא מחלק את n אז בהכרח $a_0 > 0$; כלומר יש לפחות מסלול אחד באורך 1, משמע – יש נקודת שבת משותפת.

ב) <u>הפרכה</u>: למשל G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל. לפעולה זו לא קיימות נקודות שבת (מדוע?).

ג) הטענה אינה נכונה:

על פי התרגיל שעשינו בכיתה, $|X|$ הוא סכום של מספרים המחלקים את $|G| = 14$. המחלקים של 14 הם $\{1,2,7,14\}$ ולכן $|X| = 19 = 1a + 2b + 7c + 14d$. על מנת שתהיה לפעולה זו נקודת שבת, אנו חייבים שיהיה לפחות מסלול אחד באורך 1. משמע, אם $a > 0$ אזי יש נקודת שבת.

פתרון אפשרי למשוואה: $a = 0, b = 6, c = 1, d = 0$.

עלינו למצוא דוגמא כזאת: תהי $X = \{1,2,3,4,5,\ldots,19\}$ לכל $1 \le k \le 12$ נגדיר $\sigma(k) = k$ $\tau(k) = \begin{cases} k-1 & k = 2m \\ k+1 & k = 2m-1 \end{cases}$ (כלומר למשל $\begin{matrix} \tau(1) = 2 \\ \tau(2) = 1 \end{matrix}$)

לכל $13 \le k \le 19$ נגדיר $\tau(k) = k$ $\sigma(k) = \begin{cases} k+1 & 13 \le k = 18 \\ 1 & k = 19 \end{cases}$. כל איבר ב D_7 הוא מהצורה $\sigma^i \tau^j$ עבור $0 \le i \le 6, 0 \le j \le 1$. קל לראות שהגדרת $\sigma(k)$ ו-$\tau(k)$ מגדירה את $\sigma^i \tau^j(k)$ היטב ושמדובר בפעולה עם מספר המסלולים והגדלים הדרוש וללא נקודת שבת משותפת.

דוגמא נוספת (גיאומטרית): החבורה הדיהדרלית D_n פועלת על קודקודי מצולע משוכלל בעל n צלעות בצורה טרנזיטיבית . במילים אחרות לפעולה זו יש מסלול יחיד מגודל n. ניתן להגדיר פעולה טבעית של החבורה הדיהדרלית D_n על צדדי המצולע המשוכלל כאשר כל האיברים בחבורה הדיהדרלית מהצורה $\sigma^i \tau$ מחליפים את הצדדים של המצולע: קדמי עובר לאחורי ואחורי עובר לקדמי. וכל האיברים מהצורה σ^i משאירים את צדדי המצולע. קל לבדוק שזו גם פעולה על קבוצה בת שני איברים (שני הצדדים) ושיש לה שני מסלולים.

לבסוף נתבונן ב D_7 ובשבעה משובעים משוכללים. נסתכל על שש קבוצות שבכל אחת מהן האיברים הם הצדדים של משובע מתוך השישה. יהי Y איחוד הקבוצות הנ"ל. יהי X איחוד של הקבוצה Y עם קדקדי המשובע השביעי.

בסה"כ ב X 19 איברים. D_7 פועלת על X לפ התיאור הנ"ל וברור שיש לפעולה זו 6 מסלולים מגודל 2 ועוד מסלול מגודל 7 ואין לה נקודת שבת משותפת.

מש"ל

שאלה 5

א) מצא כמה לוחות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע ב-2 צבעים.
ב) כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע את הלוחות ב- 3 צבעים קבועים.

פתרון

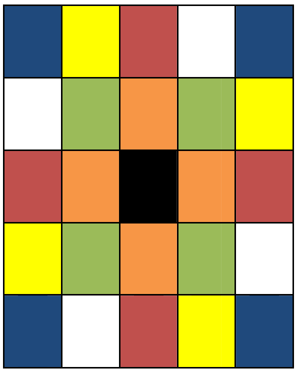
א) נגדיר את מרחב הפעולה ככל הצביעות האפשריות של הלוח:
$X=\left\{f:\{1,2,3,...,9\}\to\{0,1\}\right\}$, ונפעל עליו עם החבורה הדיהדרלית D_4.
נחשב את כל הגדלים הדרושים:

סה"כ	$\|X_g\|$	$g\in D_4$
2^9	2^9	id
$2\cdot2^3$	2^3	σ,σ^3
2^5	2^5	σ^2
$4\cdot2^6$	2^6	$\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau,\sigma^3\tau$

לבסוף נקבל על פי משפט ברנסייד כי מספר המסלולים הינו 102.

ב) הלוחות שקולים עד כדי סיבובים, ז"א שהחבורה הפועלת תהיה $A=\left\{id,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\right\}\leq D_4$ כאשר σ הוא סיבוב ב- 90° בכיוון השעון. נסמן ב- X את אוסף כל הצביעות האפשריות. מתקיים $X=\left(\mathbb{Z}_3\right)^{25}$. נרצה להשתמש בלמה של ברנסייד ולכן עלינו לחשב את מספר נקודות השבת בפעולה של כל אחד מאיברי החבורה.

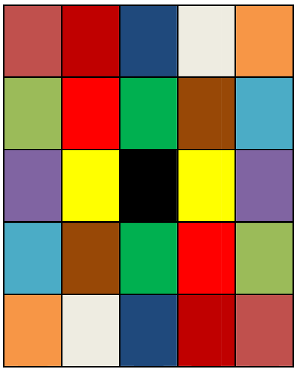
$\left|X_{id}\right|=3^{25}$, שכן תמורת הזהות אינה מזיזה את הריבוע ולכן מותר לנו לצבוע כל משבצת כרצוננו. $\left|X_\sigma\right|=3^7$, שכן קל להשתכנע כי σ שומרת במקומם ריבועים מהצורה:



[שימו לב שאין חשיבות לצבעים בתמונה; הצבעים השונים נועדו לסמן את המשבצות שאמורות להיות באותו צבע]. ניתן לראות שיש לנו חופש לבחור לצבוע 7 משבצות ב-3 צבעים, וכל שאר המשבצות יקבעו בהתאם.

$\left|X_{\sigma^3}\right| = 3^7$, שכן σ^3 היא סיבוב ב-90° נגד כיוון השעון (ולכן היא מתנהגת כמו σ).

$\left|X_{\sigma^2}\right| = 3^{13}$, שכן היא משאירה במקום ריבועים מהצורה:



בסה"כ נקבל: מספר המסלולים השונים (משמע, מספר הצביעות השונות) הוא: $k = \frac{1}{4}\left(3^{35} + 2\cdot 3^7 + 3^{13}\right)$.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

א. השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_9 כתת חבורה של S_6.

ב. תהי G חבורה אינסופית פשוטה, ותהי H תת חבורה אמיתית של G. הוכיחו ש-$[G:H] = \infty$.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u> $U_9=\{1,2,4,5,7,8\}$. כעת, מכיון ש U_9 ציקלית מספיק להראות מה התמונה σ של היוצר 2 ב $S_{\{1,2,4,5,7,8\}}\cong S_6$. נעשה זאת לפי האלגוריתם בהוכחת משפט קיילי, שכן אז תמונות כל שאר האיברים יקבעו בשל הציקליות. כזכור 2 אמור להיות מועתק ל σ כאשר $\forall x\in U_9 \quad \sigma(x)=2\cdot x$ ו $2\cdot x$ כפל ב- U_9. נקבל $\sigma(1)=2, \quad \sigma(2)=4 \quad \sigma(4)=8 \quad \sigma(8)=7 \quad \sigma(7)=5$ לכן $\sigma=(1\,2\,4\,8\,7\,5)\in S_{\{1,2,4,5,7,8\}}$.

<u>סעיף ב</u>

נניח בשלילה ש- $[G:H]=n<\infty$. לפי העידון של משפט קיילי, H מכילה תת חבורה נורמלית $N\triangleleft G$ עבורה $[G:N]\,\big|\,n!$. מכאן $[G:N]<\infty$. מכיוון ש- G פשוטה ו- $N\neq G$ (כי $N\subseteq H$) נקבל ש- $N=\{1\}$. לכן $[G:N]=|G|=\infty$, וזאת סתירה.

מש"ל

<u>בונוס</u> – גם את אתם לא מגישים את השאלה הזאת, תעשו אותה! היא בוחנת ומחדדת הבנה של מושגים חשובים רבים. וחוץ מזה היא ממש ממש יפה!

א. הוכיחו שלא ניתן לשכן את חבורת הקווטרניונים Q_8 בתוך S_7.

ב. הוכיחו שלא קיימת חבורה G כך ש- $Q_8\cong G/Z(G)$.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

<u>נפתור בשתי דרכים:</u>

<u>דרך א'</u>

נניח בשלילה שקיים שיכון של Q_8 לתוך S_7. השיכון משרה פעולה נאמנה $Q_8\times\{1,2,3,4,5,6,7\}\to\{1,2,3,4,5,6,7\}$ (מדוע?).

גודל כל מסלול אמור לחלק את 8 שהוא הסדר של Q_8 ומאידך איחוד המסלולים הוא $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. לכן גודל כל מסלול מחלק ממש את 8 ומכיון שמתקיים $|orb(x)|\cdot|Stb(x)|=|Q_8|=8$ אז הסדר של כל מייצב גדול מ- 1. כלומר

כל המיצבים הם תתי חבורות לא טריויאליות של Q_8. (-1) נמצא בכל תת חבורה שאינה טריויאלית של Q_8 ובפרט (-1) נמצא בחיתוך כל המייצבים. לכן $\forall x \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \quad -1*x = x$ בסתירה לכך שהפעולה נאמנה.

<u>דרך ב'</u>

נניח בשלילה שקיים שיכון $f: Q_8 \to S_7$. $\pm i, \pm j, \pm k$ שישה איברים מסדר 4 וכולם מקיימים את המשוואה $x^2 = -1$ שהוא מסדר 2. נתבונן ב $f(-1)$. הוא איבר מסדר 2 ובהכרח קיימת קבוצה $N \subseteq S_7$ בעלת שישה איברים מסדר 4 כך ש $\forall x \in N \quad x^2 = f(-1)$ (מדוע?). נראה שמצב זה אינו אפשרי. איבר מסדר 4 ב-S_7 הוא בהכרח מהצורה $(i_1\, i_2\, i_3\, i_4)$. מתקיים $(i_1\, i_2\, i_3\, i_4)^2 = (i_1\, i_3)(i_2\, i_4)$. יש רק ארבעה מחזורים באורך 4 ב S_7 שמקיימים $x^2 = (i_1\, i_3)(i_2\, i_4)$ והם $(i_1\, i_2\, i_3\, i_4), (i_3\, i_2\, i_1\, i_4), (i_1\, i_4\, i_3\, i_2), (i_3\, i_4\, i_1\, i_2)$. לכן לא תיתכן קבוצה N כנ"ל.

<u>סעיף ב</u>

כזכור, Q_8 נוצרת על ידי האיברים i, j ונסמן $i^2 = j^2 = t$, ושימו לב ש-t נמצא במרכז החבורה. נניח בשלילה ש-$Q_8 \cong G/Z(G)$. ננסה להראות שהתמונה של t היא טריוויאלית (כלומר מרכזית ב-G) ומכאן נסיק סתירה לכך שהסדר של התמונה של i חייב להיות 4, אך מתסבר ש- i^2 נשלח ליחידה.

נסמן את התמונות של i, j, t ב- $\bar{i}Z(G), \bar{j}Z(G), \bar{t}Z(G)$ בהתאמה. נשים לב ש-$\bar{i}Z(G), \bar{j}Z(G)$ יוצרים את חבורת המנה. מתקיים $\left(\bar{i}Z(G)\right)^2 = \bar{t}Z(G)$ ולכן קיים $a \in Z(G)$ כך ש- $\bar{i}^{\,2} = \bar{t}a$. מכיוון ש- $\bar{i}$ מתחלף עם $\bar{i}^{\,2}$ נקבל ש- $\bar{i}$ מתחלף עם $\bar{t}a$ ולכן מתחלף עם $\bar{t}$. באופן דומה מראים ש- $\bar{j}$ מתחלף עם $\bar{t}$. מכאן, מכיוון שמתחלף עם היוצרים, מסיקים ש-$\bar{t} \in Z(G)$ ולכן $\bar{i}^{\,2}Z(G) = Z(G)$ ולכן הסדר של התמונה של i הוא 2. בסתירה לכך שאיזומורפיזם שומר על סדרי איברים.

מש"ל